

ЛЕКЦИЯ 9

**Тема 1.7. Основные понятия кинематики.
Кинематика точки**

Иметь представление о пространстве, времени, траектории, пути, скорости и ускорении.

Знать способы задания движения точки (естественный и координатный).

Знать обозначения, единицы измерения, взаимосвязь кинематических параметров движения, формулы для определения скоростей и ускорений (без вывода).

Кинематика рассматривает движение как перемещение в пространстве. Причины, вызывающие движение, не рассматриваются. Кинематика устанавливает способы задания движения и определяет методы определения кинематических параметров движения.

Основные кинематические параметры***Траектория***

Линию, которую очерчивает материальная точка при движении в пространстве, называют *траекторией*.

Траектория может быть прямой и кривой, плоской и пространственной линией.

Уравнение траектории при плоском движении: $y = f(x)$.

Пройденный путь

Путь измеряется вдоль траектории в направлении движения. Обозначение — S , единицы измерения — метры.

Уравнение движения точки

Уравнение, определяющее положение движущейся точки в зависимости от времени, называется *уравнением движения*.

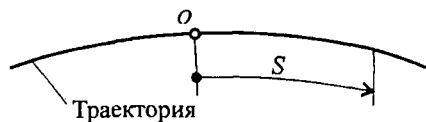


Рис. 9.1

Положение точки в каждый момент времени можно определить по расстоянию, пройденному вдоль траектории от некоторой неподвижной точки, рассмат-

риваемой как начало отсчета (рис. 9.1). Такой способ задания движения называется *естественным*.

Таким образом, уравнение движения можно представить в виде $S = f(t)$. Положение точки можно также определить, если известны ее координаты в зависимости от времени (рис. 9.2). Тогда в случае движения на плоскости должны быть заданы два уравнения:

$$\begin{cases} x = f_1(t); \\ y = f_2(t). \end{cases}$$

В случае пространственного движения добавляется и третья координата $z = f_3(t)$.

Такой способ задания движения называют *координатным*.

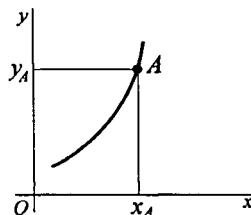


Рис. 9.2

Скорость движения

Векторная величина, характеризующая в данный момент быстроту и направление движения по траектории, называется *скоростью*.

Скорость — вектор, в любой момент направленный по касательной к траектории в сторону направления движения (рис. 9.3).

Если точка за равные промежутки времени проходит равные расстояния, то движение называют *равномерным*.

Средняя скорость на пути ΔS определяется как

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta S}{\Delta t},$$

где ΔS — пройденный путь за время Δt ; Δt — промежуток времени.

Если точка за равные промежутки времени проходит неравные пути, то движение называют *неравномерным*.

В этом случае скорость — величина переменная и зависит от времени $v = f(t)$.

При рассмотрении малых промежутков времени ($\Delta t \rightarrow 0$) средняя скорость становится равной истинной скорости движения в данный момент. Поэтому скорость в данный момент определяют как

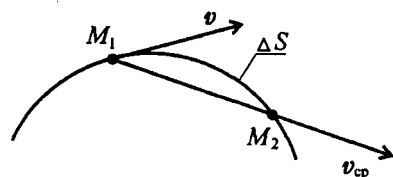


Рис. 9.3

производную пути по времени:

$$v = \frac{dS}{dt}.$$

За единицу скорости принимают 1 м/с. Иногда скорость измеряют в км/ч, $1 \text{ км/ч} = \frac{1000}{3600} = 0,278 \text{ м/с}$.

Ускорение точки

Векторная величина, характеризующая быстроту изменения скорости по величине и направлению, называется *ускорением точки*.

Скорость точки при перемещении из точки M_1 в точку M_2 меняется по величине и направлению. Среднее значение ускорения за этот промежуток времени

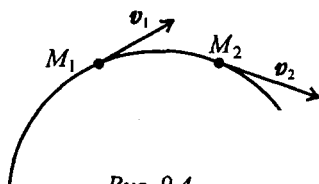


Рис. 9.4

$$a_{\text{ср}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \text{ (рис. 9.4).}$$

При рассмотрении бесконечно малого промежутка времени среднее ускорение превратится в ускорение в данный момент:

$$a = \frac{dv}{dt}.$$

Обычно для удобства рассматривают две взаимно перпендикулярные составляющие ускорения: нормальное и касательное (рис. 9.5).

Нормальное ускорение a_n характеризует изменение скорости по направлению и определяется как

$$a_n = \frac{v^2}{r},$$

где r — радиус кривизны траектории в данный момент времени.

Нормальное ускорение всегда направлено перпендикулярно скорости к центру дуги.

Касательное ускорение a_t характеризует изменение скорости по величине и всегда направлено по касательной к траектории; при ускорении его направление *совпадает* с направлением скорости, а

при замедлении оно направлено *противоположно* направлению вектора скорости.

Формула для определения касательного ускорения имеет вид:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = v' = S''.$$

Значение *полного* ускорения определяется как $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$ (рис. 9.6).

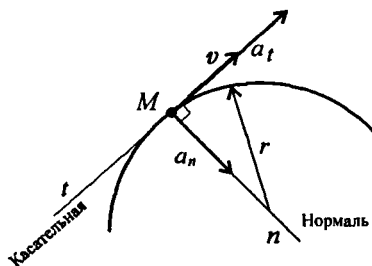


Рис. 9.5

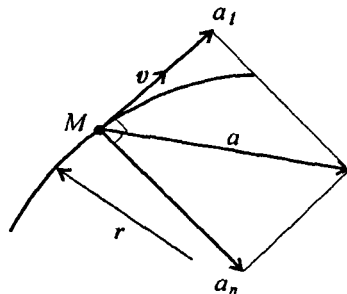


Рис. 9.6

Примеры решения задач

Пример 1. Дано уравнение движения точки: $S = 0,36t^2 + 0,18t$. Определить скорость точки в конце третьей секунды движения и среднюю скорость за первые 3 секунды.

Решение

1. Уравнение скорости $v = \frac{dS}{dt}$; $S' = 2 \cdot 0,36t + 0,18$; $v = 0,72t + 0,18$.
2. Скорость в конце третьей секунды ($t = 3$ с) $v_3 = 0,72 \cdot 3 + 0,18 = 2,34$ м/с.
3. Средняя скорость $v_{cp} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$; $v_{cp} = (0,36 \cdot 3^2 + 0,18 \cdot 3) / 3 = 1,26$ м/с.

Пример 2. Точка движется по кривой радиуса $r = 10$ м согласно уравнению $S = 2,5t^2 + 1,2t + 2,5$ (рис. 9.6).

Определить полное ускорение точки в конце второй секунды движения и указать направление касательной и нормальной составляющих ускорения в точке M .

Решение

1. Касательное ускорение определяется как $a_t = \frac{dv}{dt}$.

Уравнение скорости: $v = \frac{dS}{dt}$.

Скорость будет равна $v = 2 \cdot 2,5t + 1,2$; $v = 5t + 1,2$ (м/с).

Касательное ускорение: $a_t = v' = 5 \text{ м/с}^2$.

Вывод: касательное ускорение не зависит от времени, оно постоянно.

2. Нормальное ускорение: $a_n = \frac{v^2}{r}$.

Скорость на второй секунде будет равна $v_2 = 5 \cdot 2 + 1,2 = 11,2 \text{ м/с}$.

Величина нормального ускорения: $a_{n2} = \frac{(11,2)^2}{10} = 12,54 \text{ м/с}^2$.

3. Полное ускорение: $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$.

Полное ускорение в конце второй секунды:

$$a_2 = \sqrt{5^2 + 12,54^2} = 13,5 \text{ м/с}^2.$$

4. Нормальное ускорение направлено перпендикулярно скорости к центру дуги.

Касательное ускорение направлено по касательной к кривой и совпадает с направлением скорости, т. к. касательное ускорение — положительная величина (скорость растет).

Контрольные вопросы и задания

1. Запишите в общем виде закон движения в естественной и координатной форме.
2. Что называют траекторией движения?
3. Как определяется скорость движения точки при естественном способе задания движения?
4. Запишите формулы для определения касательного, нормального и полного ускорений.
5. Что характеризует касательное ускорение и как оно направлено по отношению к вектору скорости?
6. Что характеризует и как направлено нормальное ускорение?