

ЛЕКЦИЯ 14

**Тема 1.13. Движение материальной точки.
Метод кинетостатики**

Иметь представление о свободных и несвободных материальных точках, о силах инерции, об использовании силы инерции для решения технических задач.

Знать формулы для расчета силы инерции при поступательном и вращательном движениях, знать принцип Даламбера уметь определять параметры движения с использованием законов динамики и метода кинетостатики.

Свободная и несвободная точки

Материальная точка, движение которой в пространстве не ограничено какими-нибудь связями, называется *свободной*. Задачи решаются с помощью основного закона динамики.

Материальные точки, движение которых ограничено связями называются *несвободными*.

Для несвободных точек необходимо определять реакции связей. Эти точки движутся под действием активных сил и ограничивающих движение реакций связей (пассивных сил).

Несвободные материальные точки освобождаются от связей связи заменяются их реакциями. Далее несвободные точки можно рассматривать как свободные (принцип освобожденности от связей)

Сила инерции

Инертность — способность сохранять свое состояние неизменным, это внутреннее свойство всех материальных тел.

Сила инерции — сила, возникающая при разгоне или торможении тела (материальной точки) и направленная в обратную сторону от ускорения. Силу инерции можно измерить, она приложена к «связям» — телам, связанным с разгоняющимся или тормозящимся телом.

Рассчитано, что сила инерции равна

$$F_{\text{ин}} = |ma|.$$

Таким образом, силы, действующие на материальные точки m_1 и m_2 (рис. 14.1), при разгоне платформы соответственно равны

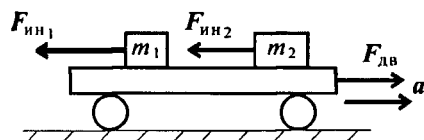


Рис. 14.1

$$F_{\text{ин}1} = m_1 a;$$

$$F_{\text{ин}2} = m_2 a.$$

Разгоняющееся тело (платформа с массой m (рис. 14.1)) силу инерции не воспринимает, иначе разгон платформы вообще был бы невозможен.

При вращательном движении (криволинейном) возникающее ускорение принято представлять в виде двух составляющих: нормального a_n и касательного a_t (рис. 14.2).

Поэтому при рассмотрении криволинейного движения могут возникнуть две составляющие силы инерции: нормальная и касательная $a = a_t + a_n$;

$$a_t = \frac{dv}{dt} = v'; \quad a_t = \varepsilon r; \quad F_{\text{ин}}^t = m \varepsilon r;$$

$$a_n = \frac{v^2}{r}; \quad F_{\text{ин}}^n = \frac{mv^2}{r}.$$

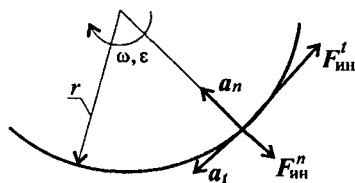


Рис. 14.2

При равномерном движении по дуге всегда возникает нормальное ускорение, касательное ускорение равно нулю, поэтому действует только нормальная составляющая силы инерции, направленная по радиусу из центра дуги (рис. 14.3).

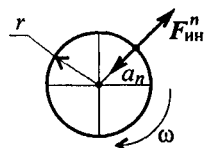


Рис. 14.3

$$\omega = \text{const};$$

$$F_{\text{ин}}^n = m a_n = m \frac{v^2}{r} = m \omega^2 r.$$

Принцип кинетостатики (принцип Даламбера)

Принцип кинетостатики используют для упрощения решения ряда технических задач.

Реально силы инерции приложены к телам, связанным с разгоняющимся телом (к связям).

Даламбер предложил *условно прикладывать* силу инерции к активно разгоняющемуся телу. Тогда система сил, приложенных к материальной точке, становится уравновешенной, и можно при решении задач динамики использовать уравнения статики.

Принцип Даламбера:

Материальная точка под действием активных сил, реакций связей и условно приложенной силы инерции находится в равновесии:

$$\sum_0^n F_k + \sum_0^n R_k + F_{\text{ин}} = 0; \quad F_{\text{ин}} = -ma.$$

Порядок решения задач с использованием принципа Даламбера

1. Составить расчетную схему.
2. Выбрать систему координат.
3. Выяснить направление и величину ускорения.
4. Условно приложить силу инерции.
5. Составить систему уравнений равновесия.
6. Определить неизвестные величины.

Примеры решений задач

Пример 1. Рассмотрим движение платформы по шероховатой поверхности с ускорением (рис. 14.4).

Решение

Активные силы: движущая сила, сила трения, сила тяжести. Реакция в опоре **R**. Прикладываем силу инерции в обратную от ускорения сторону. По принципу Даламбера, система сил, действующих на платформу, становится уравновешенной, и можно составить уравнения равновесия. Наносим систему координат и составляем уравнения проекций сил.

$$\sum_0^n F_{kx} = 0 \Rightarrow F_{\text{дв}} - F_{\text{ин}} - F_{\text{тр}} = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0 \Rightarrow R - G = 0;$$

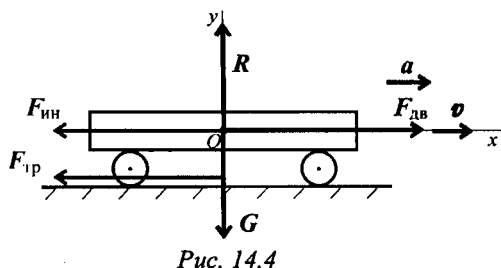


Рис. 14.4

$$|F_{\text{ин}}| = ma;$$

$$F_{\text{тр}} = fR,$$

где $F_{\text{дв}}$ — движущая сила;

$F_{\text{тр}}$ — сила трения;

G — сила тяжести;

R — реакция опоры;

$F_{\text{ин}}$ — сила инерции;

f — коэффициент трения.

Пример 2. Тело весом 3500 Н движется вверх по наклонной плоскости согласно уравнению $S = 0,16t^2$ (рис. 14.5). Определить величину движущей силы, если коэффициент трения тела о плоскость $f = 0,15$.

Решение

1. Составим расчетную схему, выберем систему координат с осью Ox вдоль наклонной плоскости.

Активные силы: движущая, сила трения, сила тяжести. Наносим реакцию в опоре перпендикулярно плоскости. Чтобы верно направить силу инерции, необходимо знать направление ускорения, определить это можно по уравнению движения.

При $a > 0$ движение равноускоренное.

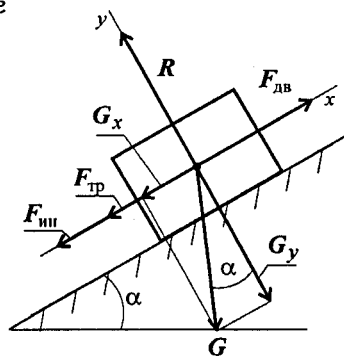


Рис. 14.5

2. Определяем ускорение движения:

$$a = v' = S''; v = S' = 0,32t; a = v' = 0,32 \text{ м/с}^2 > 0.$$

Силу $F_{\text{ин}}$ направим в обратную от ускорения сторону.

3. По принципу Даламбера составим уравнения равновесия:

$$\sum_0^n F_{kx} = 0; \quad F_{\text{дв}} - G_x - F_{\text{тр}} - F_{\text{ин}} = 0; \quad G_x = G \sin 30^\circ.$$

$$\sum_0^n F_{ky} = 0; \quad R - G_y = 0; \quad G_y = G \cos 30^\circ; \quad R = G_y.$$

4. Подставим все известные величины в уравнения равновесия

$$F_{\text{тр}} = fR; \quad F_{\text{тр}} = fG_y = fG \cos 30^\circ;$$

$$F_{\text{ин}} = ma = \frac{G}{g}a;$$

$$F_{\text{дв}} - G \sin 30^\circ - fG \cos 30^\circ - \frac{G}{g}a = 0.$$

Выразим неизвестную силу и решим уравнение:

$$F_{\text{дв}} = 3500 \cdot 0,5 + 0,15 \cdot 3500 \cdot 0,866 + \frac{3500}{9,81} \cdot 0,32 = 2318,8 \text{ Н.}$$

Пример 3. График изменения скорости лифта при подъеме известен (рис. 14.6). Масса лифта с грузом 2800 кг. Определить натяжение каната, на котором подвешен лифт на всех участках подъема

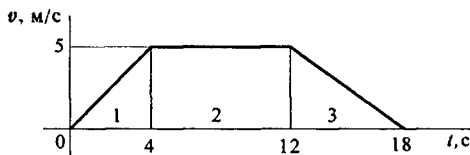


Рис. 14.6

Решение

1. Рассмотрим участок 1 — подъем с ускорением.

Составим схему сил (рис. 14.7).

Уравнение равновесия кабины лифта:

$$\sum_0^n F_{ky} = 0; \quad T_1 - G - F_{\text{ин}1} = 0; \quad T_1 = G + F_{\text{ин}1} = mg + ma_1,$$

где T — натяжение каната; G — сила тяжести; $F_{\text{ин}}$ — сила инерции растягивающая канат.

Для определения ускорения на участке 1 учтем, что движение на этом участке равнопеременное, скорость $v = v_0 + at$; $v_0 = 0$. Следовательно, ускорение:

$$a_1 = \frac{v_1}{t_1} = \frac{5}{4}; \quad a_1 = 1,25 \text{ м/с}^2.$$

Определяем усилие натяжения каната при подъеме с ускорением

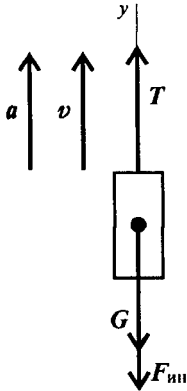


Рис. 14.7

$$2800(9,81 + 1,25) = 30\,968 \text{ Н}; \quad T_1 = 30,97 \text{ кН}.$$

2. Рассмотрим участок 2 — равномерный подъем.

Ускорение и сила инерции равны нулю. Натяжение каната равно силе тяжести.

$$T_2 - G = 0; \quad T_2 = G = mg;$$

$$T_2 = 2800 \cdot 9,81 \approx 28 \text{ кН}.$$

3. Участок 3 — подъем с замедлением.

Ускорение направлено в сторону, обратную направлению подъема. Составим схему сил (рис. 14.8).

$$\text{Уравнение равновесия: } F_{\text{ин}3} + T_3 - G = 0.$$

$$\text{Отсюда } T_3 = G - F_{\text{ин}3} = mg - ma_3.$$

Ускорение (замедление) на этом участке определяется с учетом того, что $v = 0$.

$$v_0 + a_3 t_3 = 0; \quad a_3 = -\frac{v_0}{t_3}; \quad a_3 = -\frac{5}{6} \text{ м/с}^2.$$

Натяжение каната при замедлении до остановки:

$$T_3 = 2800 \left(9,81 - \frac{5}{6} \right) = 25\,144 \text{ Н}; \quad T_3 = 25,14 \text{ кН}.$$

Таким образом, натяжение каната меняется при каждом подъеме и опускании, канат выходит из строя в результате усталости материала. Работоспособность зависит от времени.

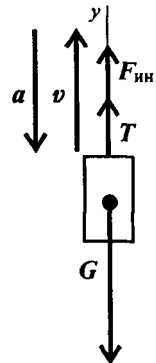


Рис. 14.8

Пример 4. Самолет выполняет «мертвую петлю» при скорости 160 м/с^2 , радиус петли 1000 м , масса летчика 75 кг . Определить величину давления тела на кресло в верхней точке «мертвой петли».

Решение

1. Схема сил, действующих на летчика (рис. 14.9):

где G — сила тяжести, R — реакция в опоре, $F_{ин}^n$ — сила инерции.

Сила давления летчика на кресло равна силе давления опоры на летчика.

2. Уравнение равновесия (движение равномерное по дуге, действует только нормальное ускорение): $F_{ин}^n - G - R = 0$

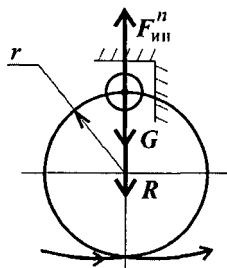


Рис. 14.9

$$R = F_{ин}^n - G; \quad R = m \frac{v^2}{r} - mg = m \left(\frac{v^2}{r} - g \right)$$

$$R = 75 \left(\frac{160^2}{1000} - 9,81 \right) \approx 1184 \text{ Н.}$$