Е. М. Вечтомов, Д. В. Широков

МАТЕМАТИКА: ЛОГИКА, ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ И КОМБИНАТОРИКА

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ СПО

2-е издание

Рекомендовано Учебно-методическим отделом среднего профессионального образования в качестве учебного пособия для студентов образовательных учреждений среднего профессионального образования

Книга доступна в электронной библиотечной системе
biblio-online.ru

Москва ▪ Юрайт ▪ 2019

УДК 51(075.32)
ББК 22.1я723
В39

Авторы:

Вечтомов Евгений Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, заслуженный работник высшей школы Российской Федерации, заведующий кафедрой фундаментальной и компьютерной математики факультета компьютерных и физико-математических наук Института математики и информационных систем Вятского государственного университета, член секции «Педагогические вузы» Научно-методического совета по математике Минобрнауки Российской Федерации, председатель Учебно-методического совета по математике педвузов и университетов Волго-Вятского региона, действительный член Московского математического общества и РАЕН, руководитель научной школы «Функциональная алгебра и теория полуколец»;

Широков Дмитрий Владимирович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной и компьютерной математики факультета компьютерных и физико-математических наук Института математики и информационных систем Вятского государственного университета, член научной школы «Функциональная алгебра и теория полуколец».

Рецензенты:

Тестов В. А. — профессор, доктор педагогических наук, профессор кафедры математики и методики обучения математике Вологодского государственного университета;

Чермных В. В. — доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры фундаментальной и компьютерной математики факультета компьютерных и физико-математических наук Института математики и информационных систем Вятского государственного университета.

Вечтомов, Е. М.

В39 Математика: логика, теория множеств и комбинаторика : учеб. пособие для СПО / Е. М. Вечтомов, Д. В. Широков. — 2-е изд. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 243 с. — (Серия : Профессиональное образование).

ISBN 978-5-534-06616-6

В данном учебном пособии представлен вводный курс математики, который направлен на формирование и развитие логико-математической культуры у студентов. Изложены основы современной математики: начала логики, теории множеств и комбинаторики. Помимо теоретической части издание содержит Практикум, в котором предложено большое количество разнообразных заданий, рассчитанных как на аудиторную, так и на самостоятельную работу студентов.

Соответствует актуальным требованиям Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования и профессиональным требованиям.

Для студентов образовательных учреждений среднего профессионального образования, преподавателей и всех изучающих основы математики.

УДК 51(075.32)
ББК 22.1я723

ISBN 978-5-534-06616-6

Оглавление

Предисловие

Вводный курс математики представляет собой введение в специальность будущего математика и/или учителя математики. Цель этого курса — формирование и развитие логико-математической культуры у начинающих обучение студентов. Учебное пособие «Математика. Вводный курс» предназначено для изучения студентами-математиками в первом семестре.

Пособие состоит из трех глав, посвященных азбуке современной математики: началам логики, теории множеств и комбинаторики, — и большого раздела «Практикум». Каждая глава предваряется своим введением исторического или мотивационного характера. В главах книги изложен теоретический материал, который иллюстрируется многочисленными подробно разобранными примерами, обозначенными тройкой чисел ***k.m.n.***, где n — номер примера пункта $k.m$. Окончание примера отмечено в тексте специальным знаком •. Примеры играют здесь основополагающую дидактическую роль.

Особое внимание уделено рассмотрению логико-математического языка и разъяснению таких базовых терминов, как *математическое выражение*, *высказывание*, *логическая связка*, *предикат*, *квантор*, *предложение*, *формула*, *закон логики*, *логическое следование*, *доказательство*, *правило вывода*, *множество*, *принадлежность*, *включение*, *операция над множествами*, *бинарное отношение*, *функция*, *перестановка*, *сочетание* и др. Важнейшей задачей пособия является ознакомление студентов с различными видами *элементарных логических рассуждений* и привитие им навыков таких рассуждений и доказательств.

Пособие написано доступным начинающему студенту языком, подобранные примеры во многом опираются на школьный курс математики. Все изучаемые в пособии понятия, выделенные *курсивом*, определены или пояснены. Достаточно подробно рассматривается понятие функции и показывается связь со школьным определением этого понятия. Некоторым понятиям (таким как «формула логики», «универсальное множество») не дается строгих определений. Это делается умышленно, чтобы не уходить в сторону от поставленных задач. Полные формальные определения таких понятий будут даны в соответствующих математических курсах.

В некоторых местах по ходу изложения материала отдельной строкой сделаны замечания. Текст замечаний акцентирует внимание на «тонких» местах, важных идеях, поясняет или уточняет введенные ранее понятия.

Раздел «Практикум» содержит большое число упражнений и задач для аудиторных занятий и для самостоятельной работы студентов, включая домашние задания. Приведены варианты трех контрольных работ и тесты для самопроверки полученных знаний и умений.

Программа вводного курса предполагает только практические занятия, некоторые из них можно вести в компьютерном классе. «Практикум» завершается задачным материалом примерных практических занятий.

В результате изучения дисциплины студент должен освоить:

трудовые действия

• владения навыками обоснованного выбора методов математики для решения поставленных задач;

необходимые умения

• решать типовые задачи;

• ориентироваться в математическом аппарате профессиональной области, подобрать, интерпретировать и оценить необходимую информацию;

• составлять результаты исследования, анализа, решения задачи с доказательным привлечением математического аппарата;

необходимые знания

• основных фундаментальных понятий логики, теории множеств, комбинаторики;

• содержания утверждений и следствий из них, используемых для обоснования выбираемых математических методов решения задач.

Пособие может быть полезно вузовским и школьным преподавателям математики, а также студентам нематематических специальностей, которые желают познакомиться с базовыми понятиями и идеями математической логики, основами комбинаторики. На практических занятиях по математике со студентами-гуманитариями можно использовать материал из «Практикума» для проведения занятий по комбинаторике, а также задачи, связанные с представлением множеств на диаграммах Эйлера–Венна.

Авторы книги имеют немалый опыт преподавания вводного курса математики, частично отраженный в пособиях [32, 3]. Мы приводим небольшой список литературы из 11 источников, на которые мы опирались в данном курсе. В завершение приводится предметный указатель.

Мы выражаем признательность Вере Ивановне Варанкиной, кандидату физико-математических наук, доценту кафедры алгебры и дискретной математики ВятГГУ, любезно предоставившей нам свои материалы по практическим занятиям.

Глава 1. Начала логики

Введение

Логика – это наука, изучающая законы и формы человеческого мышления. «Как надо рассуждать, чтобы получить правильные выводы?» – вот главный вопрос, на который ищет ответ логика. Основоположником логики считается древнегреческий философ Аристотель (384–322 гг. до н. э.). В его труде «Органон» содержатся такие разделы, как понятие, суждение, умозаключение, определение, доказательство и др. Аристотель развил учение о силлогизме – исторически первую теорию дедукции. Он впервые сформулировал основной принцип логики: правильность рассуждения должна зависеть только от его формы, то есть способа связи входящих в это рассуждение частей (посылок и заключения), но не от содержания этих частей. Содержание влияет лишь на истинность или ложность предложений, из которых конструируется рассуждение.

Математическая логика отличается от «обычной» тем, что она широко использует язык математических и логических знаков, исходя из того, что они могут полностью заменить слова обычного языка (например, русского) и принятые способы объединения слов в предложения. Еще в Средние века возникла идея о том, что, записав все исходные данные на языке специальных знаков, можно будет заменить рассуждение вычислением, которое могла бы осуществить машина (в нашем понимании – ЭВМ, компьютер). Тогда у нас будет возможность автоматически получать интересующие следствия из введенных в машину исходных данных. Наиболее близкий к реальному осуществлению замысел универсального символического языка развивал немецкий философ и математик Готфрид Лейбниц (1646–1716).

Без каких-либо особых изменений логика Аристотеля просуществовала до середины XIX столетия. Начиная с XIX в. идет активное развитие математической логики. Большой вклад в построение языка математической логики внесли ирландский ученый Джордж Буль (1815–1864) и немецкий ученый Готлоб Фреге (1848–1925). Логика постепенно становится средством анализа математики с точки зрения строгости и доказательности. С другой стороны, для развития логики начинают применяться математические методы.

Изложение больших разделов математики на языке математической логики было предпринято в работах Джузеппе Пеано (1858–1932), а также в фундаментальной трехтомной монографии Бертрана Рассела (1872–1970) и

Альфреда Уайтхеда (1861–1947), изданной в 1910–1913 гг. В 20-х гг. XX в. с программой обоснования математики на базе математической логики выступил немецкий математик Давид Гильберт (1862–1943). С этого времени начинается современный этап развития математической логики. С тех пор математическая логика является инструментом, позволяющим строить и изучать математические теории.

В настоящее время у математической логики можно выделить содержательную сторону и формальную. Содержательная теория оперирует предложениями, за которыми стоит логический смысл истины или лжи (семантика). Формальная теория отвлекается от истинностных значений и оперирует со строчками символов по строго определенным правилам (синтаксис). Современная математическая логика во многом позволяет осуществить идею Лейбница о создании универсального формализованного языка, однако полная реализация этой идеи невозможна, что следует из теоремы о неполноте немецкого математика и логика Курта Геделя (1906–1978).

В данной главе излагаются основы содержательной элементарной логики, которые необходимы для изучения любой математической дисциплины. Например, для того чтобы доказывать теоремы, нужно уметь математически грамотно строить предложения, формулировать предложение разными способами, не изменяя его логического смысла, строить отрицание к предложению, правильно выводить логические следствия и т. п. В этой главе будут рассмотрены общие правила формулировки теорем, способы и методы доказательств, варианты символической записи предложений.

§ 1. Язык логических и математических знаков

1.1. Высказывания и предикаты

Высказыванием называется повествовательное предложение, относительно которого имеет смысл однозначно говорить, истинно оно или ложно.

Приведем примеры. «Все рыбы умеют плавать», «От перестановки мест слагаемых сумма чисел не изменится» – истинные высказывания. «Каждый год содержит 365 дней» – ложное высказывание. Ясно, что вопросительные, восклицательные, повелительные предложения высказываниями не являются. Например, «Который час?», «Найдите сумму чисел 10 и 15» или «Ребята, давайте жить дружно!». Эти предложения несут другую смысловую нагрузку и логикой не анализируются.

Предложение «2014-й десятичный знак после запятой числа $\frac{1}{7}$ равен 1» также является высказыванием, хотя кому-то будет сложно установить (по крайней мере, сразу), истинно оно или ложно. Имеем задачу: найти 2014-ый знак после запятой у данного числа. Тем не менее уровень наших знаний и умение решать задачи не влияют на истинность высказывания. Если кто-то плохо знает историю, то ему будет сложно определить истинность высказывания о том, что Вторая мировая война началась в 1939 г. Иногда одно и то же предложение можно по-разному интерпретировать, например в зависимости от контекста. Скажем, фраза «Число 3 красное» в обычном понимании не имеет смысла, однако если ученику начальных классов показали число 3, записанное на карточке красным цветом, то в этом смысле фраза является верной. В дальнейшем мы не будем останавливаться на подобных нюансах, так как это никак не влияет на понимание основ логики, которая, как было замечено ранее, интересуется способами конструкции предложений, не вдаваясь в содержание.

Рассмотрим теперь такое предложение: «Ученик является отличником», понимая под отличником того, кто в данный момент времени имеет в дневнике только пятерки. Само по себе это предложение высказыванием не является, так как нельзя определить его истинность или ложность. Если иметь в виду какого-то определенного ученика, то тогда можно будет говорить о том, верно это предложение или нет. Таким образом, данное предложение легко превратить в высказывание, указав ученика, о котором говорится в предложении. В логике подобные предложения называются высказывательными формами, или предикатами.

В обычном смысле термин «предикат» происходит от английского термина predicate, что в переводе на русский язык означает сказуемое (это то, о чем говорится в предложении). Поэтому в общем случае под предикатом понимают предложение, в котором утверждается, что неизвестный объект обладает каким-то свойством. В приведенном примере говорится о свойстве «быть отличником». Неизвестный объект обозначают буквой, которую называют переменной. Рассмотренное выше предложение можно сформулировать так: «Ученик x является отличником». Если вместо переменной x подставить имя конкретного объекта (в нашем случае, – имя ученика), то получим высказывание. Заметим, что в обыденной речи при формулировке предложений переменная x не произносится, а просто подразумевается. Конечно, в предложении может присутствовать не одна, а две, три или большее число переменных. Дадим определение.

Предикатом называется предложение, которое содержит одну или несколько переменных и превращается в высказывание, если переменным придать конкретные значения, то есть имена допустимых объектов. Если переменная одна, то предикат называется одноместным, или *свойством*, если две – двуместным. В общем случае, если имеем n переменных, то предикат называется *n-местным*.

Кратко одноместный предикат обозначается в виде $A(x)$. Заглавная буква используется для обозначения самого предложения, а малая буква обозначает объект или предмет, о котором говорится в предложении. Двуместный предикат обозначают $A(x,y)$, трехместный – $B(x,y,z)$ и т. д. Когда нет необходимости, предикат обозначают одной заглавной буквой, без указания переменных, от которых этот предикат зависит. Очень часто для обозначений пользуются определенными буквами того или иного алфавита (например, переменные, от которых зависит предикат, обозначают x, y, z, …), однако это не существенно, а просто удобно. Для обозначений можно использовать любые буквы, иногда с индексами, штрихами, например a_1, a_2, b', c_1' и т. п.

Примеры одноместных предикатов

1) $A(x)$ = «x – целое число». Здесь знак равенства имеет следующий смысл: справа от него записано предложение, а слева – обозначение этого предложения. Допустимый объект, который можно подставить вместо x, – произвольное число. Если вместо x подставить число (–3), получим истинное высказывание, если взять число 3,5, то будем иметь ложное утверждение. Кратко это записывается так: $A(-3) = и$, $A(3{,}5) = л$. Буквы *и* и *л* обозначают значения истины и лжи соответственно.

2) $B(x)$ = «Фигура x – это треугольник». Чтобы предложение имело смысл, вместо x можно подставлять любую фигуру на плоскости или в пространстве.

3) $C(x)$ = «x – студент ВятГГУ». Здесь под переменной x понимается любой человек. Также можно сузить область допустимых объектов и понимать под x произвольного студента вуза.

Таким образом, какие объекты считаются допустимыми, а какие нет, зависит от контекста либо отдельным образом оговаривается.

Примеры двуместных предикатов

1) $A(x,y)$ = «x является отцом y». Допустимые объекты – люди.

2) $B(x,y)$ = «Треугольник x подобен треугольнику y». Допустимые объекты – треугольники.

3) $C(x,y)$ = «Сумма чисел x и y положительна». Вместо переменных x и y можно подставлять произвольные числа.

Примеры трехместных предикатов

1) $A(x,y,z)$ = «Точка x лежит между точками y и z». Здесь переменные обозначают точки, лежащие на какой-то одной прямой.

2) $B(u_1,u_2,u_3)$ = «Сумма функций u_1 и u_2 равна функции u_3». Переменные u_1, u_2 и u_3 используются для обозначения функций. Например, взяв вместо u_1 функцию $y = x^2$, вместо u_2 функцию $y = 2x+1$, а вместо u_3 функцию $y = (x+1)^2$, получим истинное высказывание.

В последнем примере мы сталкиваемся с определенной сложностью психологического характера. Кому-то может показаться, что необычно обозначать функцию одной переменной u, ведь привычным образом функция обозначается как $y = f(x)$. Однако последняя запись – это один из способов записать функцию в общем виде, подчеркивающий, что x является независимой переменной, то есть аргументом функции, а y – это зависимая переменная, то есть значение функции. Сама же функция имеет обозначение f. Вместо буквы f можно использовать, вообще говоря, любую букву.

Сделаем еще один вывод из рассмотренных примеров. В записи $A(x)$ буква A обозначает предложение, а буква x обозначает переменную. При этом, как мы видели, за x может скрываться имя не только числа, которое в математике принято обозначать малыми буквами. Переменная x может обозначать треугольник, точку, функцию или любой другой объект, возможно, нематематической природы. Поэтому, несмотря на то что треугольник, например, принято обозначать заглавными буквами ABC, в рассмотренном выше примере треугольник обозначен малой буквой. Запись ABC подчеркивает, что рассматривается треугольник с вершинами A, B, C. Аналогично, точки на плоскости принято обозначать заглавными буквами A, B, M, N, P и т. д., однако это не мешает нам обозначить произвольную точку переменной x, или a, или a_1.

Итак, логику интересуют только предложения, которые имеют два значения: истины или лжи. Договоримся в дальнейшем под термином «предложение» (синоним «утверждение») понимать именно такое предложение, то есть высказывание или предикат, обозначая его заглавными буквами латинского алфавита: A, B, C_1, C_2, P, Q, ... Заметим, что высказывание можно считать частным случаем предиката, значение истинности которого не зависит ни от одной переменной. Поэтому в логике говорят, что высказывание – это нульместный предикат.

Введем важное понятие равносильных предложений, аналогичное понятию равенства числовых выражений. Два предложения A и B называются *равносильными* (*логически равными*), если они всегда принимают одинаковые истинностные значения.

Равносильность предложений, как правило, обозначается знаком $\Leftrightarrow$. Наряду с этим знаком используют другие, например знак волны ~ или ≡.

Расшифруем определение для случаев, когда мы имеем высказывания или предикаты.

Два высказывания будут равносильными, если они оба одновременно истинны или одновременно ложны.

Пример 1.1.1. Высказывание A = «Число 3 четное» равносильно высказыванию B = «Разность чисел 2 и 3 есть натуральное число», так как оба предложения ложны. Символически $A \Leftrightarrow B$. •

Пусть предложения зависят от переменных. В этом случае предложения считаются равносильными, если они принимают одинаковые истинностные значения при любой подстановке вместо переменных допустимых значений.

Пример 1.1.2. Предложение «Треугольник x подобен треугольнику y» равносильно предложению «Треугольник y подобен треугольнику x», так как какие бы два треугольника мы ни взяли, истинность одного из предложений влечет истинность другого предложения (что вытекает из определения подобия треугольников), то есть эти предложения не могут принимать разные значения.

А вот предикат «Числовые функции f и g равны» не равносилен предикату «Производные функций f и g равны». Например, если мы возьмем в качестве f функцию $y = x^2$, а вместо g – функцию $y = x^2+2$, то первое предложение будет ложным, а второе – истинным. •

1.2. Математические выражения

В данном пункте мы рассмотрим основные правила образования математических выражений, представляющих собой обозначения предметов (термы) или предложения (формулы). *Математические выражения* – это осмысленные последовательности букв (знаков). Приведем наиболее употребительные знаки, используемые для построения выражений.

– Знаки цифр: 0, 1, 2, …, 9.

– Буквы, в основном латинского (A, B, C, …, Z, a, b, c, …, z) и греческого алфавита (Α, Β, Γ, …, Ω, α, β, γ, …, ω). Реже используют другие алфавиты, например русский (для обозначения наибольшего общего делителя, сокращенно НОД). При этом буквы могут быть строчные, заглавные (в математике буквами A и a принято обозначать разные объекты), возможно, с индексами вверху или внизу, штрихами и т. п.

Если буква обозначает какой-то конкретный объект, она называется *константой*. Часто буква обозначает произвольное значение из некоторого заранее определенного множества M. Такая буква называется *переменной* (более точно, переменной по множеству M). Вместо одной буквы иногда используют комбинации букв.

– Знаки операций: + (сложение), · (умножение), : или / (деление), – (вычитание). Кроме указанных знаков используются другие. Вообще, под операцией в математике понимают правило, по которому произвольно выбранным объектам из заранее данного множества ставится в соответствие однозначно определенный объект того же множества. При сложении числам (–7) и 3,5 соответствует число (–3,5). В этом смысле нахождение производной функции тоже операция, обозначаемая штрихом ′ (каждой дифференцируемой функции ставится в соответствие некоторая новая функция). Укажем здесь также знак интеграла $\int$.

– Знаки отношений: = (равенство), < (меньше), > (больше), $||$ (параллельность), ⊥ (перпендикулярность) и другие.

– Знаки скобок: (,) , [,] , { ,}.

Некоторым комбинациям математических знаков мы придаем смысл. Например, последовательность 2+3 означает, что рассматривается сумма чисел 2 и 3, выражение 4:2=2 говорит о том, что, разделив 4 на 2, получим 2, выражение x=5+y понимается как уравнение с двумя переменными. Следующие последовательности знаков не имеют самостоятельного смысла: –2+, 3+<4.

Рассмотрим основные виды выражений, имеющие математический смысл.

Во-первых, это *имена* (то есть обозначения) *объектов*.

Пример 1.2.1. Выражения 5, 3+4, 10:2+2, π – это имена чисел (π – это обозначение числа «пи»), sin – имя функции синус, **N** (жирная печатная буква «эн») – обозначение множества натуральных чисел. •

Во-вторых, рассмотрим выражение, содержащее переменные, после подстановки вместо которых определенных имен объектов получается снова имя некоторого объекта. Такое выражение называют *именной формой*.

Пример 1.2.2. Рассмотрим именную форму x^2+2. Если в это выражение вместо x подставить 2, то получится выражение 2^2+2, это есть новое имя числа 6, если вместо x подставить (–1), получится выражение $(-1)^2+2$ – имя числа 3. Другие примеры именных форм: $a+b$, $(5x+y)^2$, $\sin(\alpha\beta)+1$. •

Комбинации знаков рассмотренных двух видов называют *термами*. В школьном курсе математики термы, составленные из чисел и переменных по числовым множествам с помощью знаков сложения, умножения, вычитания, деления, возведения в рациональную степень, называются *алгебраическими выражениями*.

Такие выражения еще не имеют логического смысла, то есть не являются ни высказываниями, ни предикатами.

Для того чтобы получить предложение, относительно которого можно будет говорить, истинно оно или ложно, надо соединить термы знаками отношений, например 3+4=10:2+2, 5=3+4, 7>5. Первое и третье выражения определяют истинные высказывания, второе выражение есть ложное высказывание.

Пример 1.2.3. Рассмотрим прямоугольник $ABCD$, смежные стороны AB и BC которого обозначим буквами u и v. Тогда выражение $u\perp v$ определяет истинное высказывание, а выражение $u \parallel v$ – ложное высказывание.

Соединив термы $(5x+y)^2$ и $x+2$, где x и y – переменные, знаком меньше, получим предикат $(5x+y)^2 < x+2$.

Предикат «Произведение чисел x и y равно 1» на математическом языке можно записать так: $x\cdot y = 1$. •

Иногда одно и то же выражение может трактоваться по-разному.

Пример 1.2.4. Выражение $y = 1$ – это предикат от переменной y. С другой стороны, имеем обозначение функции, которая при всех значениях аргумента принимает значение, равное 1. Такую функцию можно обозначить каким-нибудь символом, например жирной единицей **1**. •

Пример 1.2.5. Рассмотрим такое выражение: $\left(x^2\right)'|_{x=3} = 6$. Здесь записано, что производная функции $y = x^2$ в точке 3 равна 6. Это истинное утверждение. Буква x в данном выражении используется для обозначения аргумента функции. Если вместо x подставить конкретное число, получится бессмысленная запись, например $\left(2^2\right)'|_{2=3} = 6$ или $\left(3^2\right)'|_{3=3} = 6$. •

Таким образом, не любой букве выражения можно придавать конкретные значения. Говорят, что буква x в рассмотренном выражении является *связанной переменной*.

Другой пример: терм $\int\limits_0^1 x^3 \mathrm{d}x$ содержит связанную переменную x и является именем числа 0,25. Можно сказать, что связанная переменная используется как неотделимая часть в обозначении какого-то объекта. Переменная, которая допускает, что вместо нее можно подставить допустимое значение, называется *свободной*.

Упражнение. Объясните, что за переменные мы имеем в следующих формулах дифференцирования: $(uv)' = u'v + uv'$, $(x^2)' = 2x$. Какое равенство определяет высказывание, а какое предикат?

Определим для целых чисел два знака отношений $\mid$ и $\vdots$. Пусть a и b – целые числа. Говорят, что число *a делится на число b*, или, по-другому, *b является делителем a*, если существует целое число q, такое, что $a = b\cdot q$. Фразу «a делится на b» записывают $a \vdots b$, а фразу «b – делитель a» или «b делит a» – $b \mid a$. Если a не делится на b, то пишут $a \not\vdots\, b$. Можно также использовать знак отрицания и писать $\rceil(a \vdots b)$ или $\overline{a \vdots b}$.

Пример 1.2.6. $12 \vdots 4$ (12 делится на 4) или $4 \mid 12$ (4 делит 12), так как 12 разлагается в произведение чисел 4 и 3, то есть для целого числа 3 имеем 12=4·3. При этом $12 \not\vdots\, 8$, так как не существует целого числа q, при котором было бы верно равенство 12=8·q. Действительно, последнее равенство возможно только при одном q, равном отношению чисел 12 и 8, которое равно не целому числу 1,5. •

Любое целое число a, не равное 0 и 1, имеет по меньшей мере два натуральных делителя (единицу 1 и само a) и четыре целых делителя (1, –1, a, $-a$). Натуральным делителем единицы является только она сама. Натуральное число, имеющее ровно два натуральных делителя, называется *простым*, а число, имеющее более двух натуральных делителей, –

составным. Число 1 не относится ни к простым числам, ни к составным. Простые числа, не превосходящие 20, таковы: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19.

Заметим, что в общем случае запись $a \vdots b$ или $b \mid a$ определяет двуместный предикат, так как знаки $\mid$ и $\vdots$ – это знаки отношений. А знак деления : или / – это знак операции. Напомним, что операция обязательно имеет результат во множестве рассматриваемых объектов. Например, запись 12:4 означает, что производится операция деления, и этот терм является именем числа 3. В общем случае выражение $a{:}b$ есть терм, обозначающий частное от деления числа a на число b.

Если число a не делится на число b, то частное чисел a и b является не целым числом. Однако в этом случае можно рассмотреть неполное частное. Для этого нужно *разделить a на b с остатком*, то есть представить число a в виде $a=bq+r$, где q (*неполное частное*) и r (*остаток*) – целые числа, причем остаток r неотрицателен и меньше абсолютной величины числа b. Если b не ноль, то числа q и r всегда существуют и определены однозначно. Этот факт будет строго доказан в курсе теории чисел. На практике, чтобы найти частное и остаток при натуральных числах a и b, нужно выполнить известную процедуру деления столбиком. Теперь можно сказать, что делимость числа a на ненулевое число b означает, что при выполнении операции деления a на b с остатком получается остаток r, равный 0.

Комбинация математических знаков, представляющая собой символическую запись высказывания или предиката, называется *формулой*. Если формула содержит свободные переменные, то при каких-то значениях переменных она может обращаться в истинное высказывание, а при каких-то значениях переменных – в ложное высказывание.

Пример 1.2.7. Рассмотрим формулу $x+y=xy$. При некоторых значениях переменных эта высказывательная форма является истинным высказыванием ($x=2$; $y=2$, или $x=1{,}5$; $y=3$), но при некоторых значениях она обращается в ложное высказывание ($x=1$; $y=2$).

Теперь рассмотрим формулу $(x+1)^2=x^2+2x+1$. Эта формула обращается в истинное высказывание при подстановке вместо x любого числа. •

Формула, которая принимает истинное значение при любой подстановке вместо свободных переменных допустимых значений, называется *тождественно истинной*. Формула, которая принимает ложное значение при любой подстановке вместо переменных допустимых значений, называется *тождественно ложной*.

Пример 1.2.8. Формулы $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$, $x^2\geq 0$, $\sin x<2$, где переменные a, b, x обозначают произвольные действительные числа, тождественно истинны, а формула $\sin x>1$ тождественно ложна. •

Тождественно истинное равенство называют *тождеством*.

Пример 1.2.9. Равенство $\frac{a^2-1}{a-1}=a+1$ есть тождество, так как при всех допустимых числах a является истинным высказыванием. Однако при значении a, равном 1, левая часть равенства не определена (терм $\frac{1^2-1}{1-1}$ не является именем никакого числа, потому что на нуль делить нельзя), а правая часть равенства равна 2. В этом случае принято говорить, что данное равенство является тождеством при a, не равном 1. •

Обратим внимание на один тонкий момент. На любую записанную формулу, содержащую свободную переменную, можно смотреть двояко: с одной стороны, как на предикат, с другой стороны, как на высказывание. Например, выражение $x^2>0$ может пониматься как неравенство с переменной x. Оно может быть записано с целью нахождения множества корней. Также на это выражение можно посмотреть как на высказывание о том, что это неравенство верно при любых значениях x. Конечно, если нет никаких оговорок, мы имеем ложное высказывание. Однако при условии, что по каким-то причинам рассматриваются только ненулевые числа, неравенство $x^2>0$ действительно определяет тождественно истинную формулу. Таким образом, что именно понимается под записанным выражением $x^2>0$, зависит от контекста.

1.3. Логические связки

Сформулируем основные правила образования новых предложений из исходных с помощью основных связок и союзов обычного разговорного языка. Одних только правил русского языка бывает недостаточно, так как иногда в одно и то же предложение, сформулированное на русском языке, мы вкладываем разный смысл. Для примера рассмотрим оборот речи «Если, то», с помощью которого сформулируем два предложения:

1) «Если Миша сдаст экзамен на отлично, то пойдет на дискотеку».

2) «Если Миша не сдаст экзамен на отлично, то на дискотеку не пойдет».

Вопрос: в этих предложениях говорится об одном и том же или существует ситуация, когда одно из предложений является верным, а другое ложным? Другими словами, спрашивается, равносильны ли эти предложения.

До тех пор, пока мы четко не определим правила построения подобного рода фраз, на вопрос ответить однозначно нельзя. С одной стороны, формулируя первое предложение, мы часто подразумеваем и второе предложение. Однако посмотрим на эти предложения с другой стороны.

Вначале запишем схемы предложений. Для этого предложение «Миша сдаст экзамен на отлично» обозначим буквой A, а предложение «Миша пойдет на дискотеку» – буквой B. Тогда данные предложения схематично можно записать так:

1) «Если A, то B», 2) «Если не A, то не B».

Теперь подставим вместо A и B другие предложения. Вместо A возьмем: «Стол сделан из дуба», вместо B: «Стол является деревянным». Тогда получим другую пару предложений:

1) «Если стол дубовый, то он деревянный»,

2) «Если стол не дубовый, то он не деревянный».

Так как эти предложения построены по тем же схемам, что первые два, значит, равносильность первой пары предложений должна означать равносильность второй пары. Однако первое предложение в обыденной речи, очевидно, является верным высказыванием, так как дуб – это дерево, а второе предложение по общепринятому смыслу ложно, так как стол может быть сделан из другого дерева, например из сосны.

Таким образом, в общем случае предложения, построенные по схемам «Если A, то B» и «Если не A, то не B», нельзя считать логически одинаковыми.

Итак, для того чтобы исключить двусмысленность при конструкции предложений, нужны четкие правила, позволяющие определять истинность или ложность получаемого предложения в зависимости от истинности или ложности исходных предложений A и B.

Придадим союзам «и», «или», а также схемам «если, то», «тогда и только тогда», «неверно, что» однозначный логический смысл.

Пусть буквы A и B обозначают произвольные предложения. Начнем с простых ситуаций.

1. *Знак отрицания* $\rceil$ ($\neg$) или $\bar{\ }$. Выражение $\rceil A$ ($\neg A$, $\overline{A}$) читается: «*не A*» или «*неверно, что A*».

Значения предложения $\rceil A$ определим таблицей, из которой видно, что предложение $\rceil A$ истинно в точности тогда, когда исходное предложение A ложно:

A	$\rceil A$
и	*л*
л	*и*

При формулировке простых по структуре предложений частицу «не» иногда можно «проносить вовнутрь» предложения. Например, предложение «Неверно, что число $\sqrt{6}$ целое» можно сформулировать так: «Число $\sqrt{6}$ не целое». Также предложение «Неверно, что прямые a и b пересекаются» формулируют: «Прямые a и b не пересекаются».

Часто объект, который не обладает каким-то свойством, называют термином с частицей «не». Например, целое число, не являющееся четным, называется нечетным. Поэтому одинаково правильно говорить «Целое число нечетное» и «Целое число не является четным». Но без оговорки, что число целое, мы имеем разные по смыслу предложения. Например, «Число 0,2 не является четным» – истина, а предложение «Число 0,2 нечетное» – ложь.

Рассмотрим словосочетание «нечетная функция». Здесь мы имеем самостоятельный термин и слово «нечетная» нельзя писать и произносить раздельно, то есть предложение «Функция является нечетной» не является отрицанием предложения «Функция является четной». Действительно, существует пример функции, при котором оба предложения ложны. Например, функция $y=x+1$ не является четной и не является нечетной (постарайтесь объяснить это).

2. *Знак конъюнкции* $\wedge$. Выражение $A \wedge B$ читается: «*A и B*». Иногда конъюнкция обозначается знаком &.

Значения предложения $A \wedge B$ в зависимости от составляющих его предложений A и B определены таблицей:

A	B	$A \wedge B$
и	*и*	*и*
и	*л*	*л*
л	*и*	*л*
л	*л*	*л*

Таким образом, предложение $A \wedge B$ истинно только в одном случае, когда оба предложения A и B истинны. В остальных случаях это предложение ложно. При формулировке предложения $A \wedge B$ вместо союза «и» можно использовать другие союзы, имеющие тот же логический смысл одновременного выполнения каждого из предложений: «а», «но».

Пример 1.3.1. Предложение «Число 111 не делится на 2, но делится на 3» – символически можно записать $\rceil A \wedge B$, где A = «111 делится на 2», B = «111 делится на 3». •

3. *Знак дизъюнкции* $\vee$. Выражения $A \vee B$ читается: «*A или B*».

Значения предложения $A \vee B$ определены таблицей:

A	B	$A \vee B$
и	*и*	*и*
и	*л*	*и*
л	*и*	*и*
л	*л*	*л*

Из таблицы видно, что предложение «A или B» истинно в тех случаях, когда хотя бы одно из предложений A или B истинно, а в случае, когда оба предложения A и B ложны, предложение $A \vee B$ принимает ложное значение.

Иногда из содержания предложений A и B вытекает, что предложения не могут быть одновременно истинны. В этом случае предложение формулируют с помощью союза «либо». Например, предложение «Число либо положительное, либо отрицательное» также имеет вид «A или B», но вместе с тем имеет такой подтекст, что одновременно и положительным, и отрицательным число быть не может.

Сформулированные выше правила, по всей видимости, вопросов не вызывают. Перейдем к рассмотренной в начале пункта схеме «Если A, то B».

4. *Знак импликации* $\to$. Выражение $A \to B$ читается: «*Если A, то B*». Иногда для обозначения этой связки используется другое обозначение стрелки $\Rightarrow$, а также знак $\supset$. Наряду с фразой «Если A, то B» используют другие, аналогичные ей: «*B тогда, когда A*», «*A только тогда, когда B*».

Мотивируем определение значений предложения $A \to B$. Основная трудность, которая здесь возникает, состоит в присвоении значения предложению $A \to B$ для тех случаев, когда A ложно. Чтобы разумно определить значения, вспомним рассмотренное выше верное предложение: «Если стол дубовый, то он деревянный». Здесь A = «Стол дубовый», B = «Стол деревянный». Пусть стол сделан из сосны. Тогда A ложно, B истинно. Пусть стол будет железным. Тогда A ложно и B ложно. В обоих случаях предложение A ложно, а получаемое предложение «Если A, то B» истинно. При этом оба эти случая реально возможны. Конечно, возможен случай, когда мы имеем дубовый стол, тогда A и B одновременно истинны. А вот примера истинного предложения $A \to B$, когда A=*и*, B=*л*, не существует.

Таким образом, случаи, когда A=*и*, B=*и*, или A=*л*, B=*и*, или A=*л*, B=*л*, должны определять истинное предложение $A \to B$. И лишь один случай, при котором A=*и*, B=*л*, означает, что предложение $A \to B$ ложно.

Итак, в математической логике значения предложения $A \to B$ задаются приведенной таблицей:

A	B	$A \to B$
и	*и*	*и*
и	*л*	*л*
л	*и*	*и*
л	*л*	*и*

В дальнейшем всюду фраза «Если A, то B» будет пониматься именно так. Здесь предложение A называется *посылкой*, или *условием*, а B – *заключением*.

Пример 1.3.2. Родители пообещали своему сыну Пете: если он успешно окончит университет, они купят ему машину. Известно, что сын университет не окончил, а машину ему родители все-таки купили. Можно ли утверждать, что слова родителей были ложью?

Чтобы ответить на вопрос, рассмотрим предложения: A = «Сын оканчивает университет», B = «Ему покупают машину». При этом A=*л*, B=*и*. Обещание родителей имеет вид $A \to B$. По определению это предложение при заданных значениях A и B верно (третья строка таблицы). Поэтому с точки зрения логики слова родителей верны. А вот если бы их сын окончил институт, а машину ему не купили, в этом случае (и ни в каком другом) обещание было бы не выполнено. •

Теперь рассмотрим еще одну логическую связку, которую часто имеют в виду, когда говорят слова «если, то». Например, если в условиях примера 1.3.2 родители предполагали, что в случае, если их сын Петя не окончит институт, они не купят ему машину, правильно было бы сказать: «Машина будет куплена в том и только в том случае, если Петя окончит институт».

5. *Знак эквиваленции* $\leftrightarrow$ или $\Leftrightarrow$. Выражение $A \leftrightarrow B$ читается: «*A тогда и только тогда, когда B*». Возможны другие формулировки: «*A в том и только в том случае, если B*», «*A в точности тогда, когда B*» и т. п.

Значения предложения $A \leftrightarrow B$ задаются таблицей:

A	B	$A \leftrightarrow B$
и	*и*	*и*
и	*л*	*л*
л	*и*	*л*
л	*л*	*и*

В случаях, когда A и B принимают одинаковые значения, предложение $A \leftrightarrow B$ верно, в остальных случаях предложение $A \leftrightarrow B$ ложно.

Нетрудно заметить, что фраза «A тогда и только тогда, когда B» состоит из двух фраз: «A тогда, когда B» и «A только тогда, когда B». Первое предложение записывается $B \to A$, а второе $A \to B$. Эти два предложения одновременно истинны в двух случаях: A=*и*, B=*и*, а также A=*л*, B=*л*.

Итак, мы определили пять знаков: $\wedge$ (конъюнкция), $\vee$ (дизъюнкция), $\to$ (импликация), $\leftrightarrow$ (эквиваленция), $\rceil$ (отрицание), которые называют *логическими связками*. Эти знаки позволяют из данных предложений A и B получать новые предложения. При этом значение (истины или лжи) нового предложения однозначно определяется значениями предложений A и B. Правило получения нового предложения из исходных предложений называется *логической операцией*. Таким образом, каждая из логических связок определяет логическую операцию, которая имеет такое же название что и соответствующая ей связка.

Рассмотренные операции можно использовать и для высказываний, и для предикатов. Например, соединив два одноместных предиката «Число x больше 3» и «Число x отрицательное» знаком дизъюнкции, получим одноместный предикат: «Число x больше 3 или отрицательное». Единственно, для того чтобы соединить два предиката логической связкой, нужно, чтобы была задана некоторая общая область D допустимых объектов, которые можно подставлять в данные предикаты вместо переменных.

Определим еще две логические связки, называемые *кванторами*, которые позволяют из одноместных предикатов получать высказывания. Термин «квантор» в переводе с латинского языка означает «сколько». Поэтому эти знаки используются для ответа на вопрос о том, сколько объектов удовлетворяют предложению A, – все или хотя бы один.

Возьмем произвольный предикат, у которого выделим переменную, от которой зависит его значение. Обозначим его $A(x)$.

6. *Квантор общности* $\forall$. Данный знак происходит от английского слова *All* и является сокращением следующих слов: «все», «каждый», «всякий», «любой».

Выражение $\forall x A(x)$ означает, что предикат $A(x)$ выполняется для всех допустимых объектов x. Читается: «Для всех икс а от икс».

7. *Квантор существования* $\exists$. Данный знак происходит от английского слова *Exist* и является сокращением следующих слов: «существует», «найдется», «хотя бы один», «некоторый».

Выражение $\exists x A(x)$ означает, что предикат $A(x)$ выполняется хотя бы для одного из допустимых объектов x. Читается: «Существует икс а от икс».

Пример 1.3.3. Пусть переменная x обозначает студента вуза. Рассмотрим предложение $A(x)$ = «Студент x имеет машину». Тогда $\forall x A(x)$ означает, что все студенты вузов имеют машину. Это ложное высказывание. Предложение $\exists x A(x)$ означает, что некоторые студенты имеют машину, что является верным утверждением.

Таким образом, изначально мы имели предикат, значение которого зависело от значения переменной x. После выполнения операций были получены именно высказывания, значения которых уже не зависят от переменной x. •

Пусть имеется формула $A(x)$, содержащая свободную переменную x. Тогда утверждение о том, что формула $A(x)$ является тождественно истинной, кратко запишется $\forall x A(x)$.

Операция получения предложения с помощью кванторов называется *квантификацией*. При использовании выражений $\forall x A(x)$ и $\exists x A(x)$ также говорят: «*На переменную x навесили квантор*» или «*Переменную x связали квантором*».

Заметим, что кванторные операции применимы не только к одноместным предикатам. Если будет дан двуместный предикат $A(x,y)$, то можно связать переменную x квантором и образовать предложение $\forall x A(x,y)$, истинность которого будет зависеть уже только от одной переменной y, и мы будем иметь одноместный предикат. В этой записи переменная x называется *связанной квантором*, а переменная *y – свободной*. В общем случае, применив кванторную операцию к любой из переменных n-местного предиката, в итоге получим $(n–1)$-местный предикат.

Кванторами можно связать любое количество переменных. Если имеем двуместный предикат $A(x,y)$, то формально можно получить 8 высказываний, связав каждую переменную каким-то квантором: $\forall x \forall y A(x,y)$, $\forall y \forall x A(x,y)$, $\forall x \exists y A(x,y)$, $\exists y \forall x A(x,y)$, $\exists x \forall y A(x,y)$, $\forall y \exists x A(x,y)$, $\exists x \exists y A(x,y)$, $\exists y \exists x A(x,y)$. Некоторые предложения имеют один и тот же смысл, например первое и второе (предикат A должен принимать истинное значение для любых значений x и y), а также седьмое и восьмое. Остальные выражения в общем случае дают разные по истинности высказывания.

Пример 1.3.4. Пусть в классе всего два мальчика – Петя и Коля. Для самостоятельного решения были заданы три задачи, обозначим их числами 1, 2, 3. Петя решил задачи 1 и 2, а Коля – одну задачу с номером 3. Введем предикат $A(x,y)$, который означает, что мальчик x решил задачу y. Здесь переменная x обозначает имя мальчика, а переменная y – номер задачи. Рассмотрим следующие высказывания.

$\forall x \exists y A(x,y)$ = «Каждый мальчик решил хотя бы одну задачу» – истинное высказывание, так как и Петя решил две задачи, и Коля решил по крайней мере одну задачу.

$\exists y \forall x A(x,y)$ = «Найдется задача, которую решили все мальчики класса» – ложь, так как такой задачи нет (и 1-ю и 2-ю задачи решил только Петя, а 3-ю – только Коля).

$\exists x \forall y A(x,y)$ = «Хотя бы один мальчик решил все задачи» – ложное утверждение.

$\forall y \exists x A(x,y)$ = «Каждая задача решена хотя бы одним учеником» – истина, так задача с номером 1 решена Петей, задача с номером 2 также решена Петей, а задача 3 решена Колей. •

Из рассмотренного примера можно сделать вывод: порядок записи кванторов влияет на логический смысл предложения. Поэтому четкая формулировка предложения должна однозначно предполагать, в каком порядке идут кванторы общности и существования.

Упражнение. Самостоятельно проанализируйте значения высказываний из примера 1.3.4 в предположении, что Петя решил задачи с номерами 2 и 3.

В общем случае из предиката $A(x)$ можно получить два высказывания – $\forall x A(x)$ и $\exists x A(x)$. Однако очень часто записанная формула $A(x)$ понимается именно как высказывание $\forall x A(x)$, хотя квантор общности при записи или формулировке опускают. Например, записав $x^2 \geq 0$, имеют в виду, что квадрат любого действительного числа неотрицателен. Полная запись высказывания такова: $\forall x(x^2 \geq 0)$. Запись $(4x+6y)\vdots 2$, где x, y – целые числа, предполагает, что указанная сумма всегда делится на 2, то есть четна. Чтобы это подчеркнуть, следует записать $\forall x \forall y((4x+6y)\vdots 2)$.

Определенные в двух последних пунктах математические знаки и знаки логических связок составляют алфавит математического языка.

1.4. Отношение следования предложений

Рассмотрим два предложения: A = «Числа x и y равны», B = «Квадраты чисел x и y равны». Эти предложения не являются равносильными, так как, например, при $x = 2$, $y = -2$ первое из них ложно, а второе истинно. Однако A и B связаны между собой в том смысле, что какие бы значения мы ни придавали переменным x и y, утверждение «Если $x=y$, то $x^2=y^2$» является верным, так как всегда, когда верна посылка A, верно заключение B (напомним, что импликация $A \to B$ принимает значение лжи только в одном случае, когда A=*и*, B=*л*, а для данных предложений этот случай невозможен).

Предложение B называется *следствием* предложения A (также говорят, что *из A следует B*), если всегда, когда предложение A принимает истинное значение, предложение B также принимает истинное значение.

Пусть предложения A и B определены в общей области D. Тогда независимо от истинностных значений этих предложений можно сконструировать новое предложение, являющееся импликацией $A \to B$. Однако не всегда эта импликация будет принимать истинное значение. Например, мы законно можем составить фразу «Если $x^2=y^2$, то $x=y$», являющуюся двуместным предикатом, при этом для некоторых значений x и y эта импликация будет принимать истинное значение. Но если взять числа 2 и (–2), импликация будет ложна. Поэтому из равенства $x^2=y^2$ не следует равенство $x=y$.

Итак, из определения вытекает, что отношение следования и операция импликации имеют следующую взаимосвязь:

Утверждение о том, что из A следует B, означает, что импликация $A \to B$ принимает истинное значение при любых значениях свободных предметных переменных из области D.

Для математической ясности лучше использовать разные обозначения операции импликации и отношения следования. Поэтому импликацию будем обозначать знаком $\to$, а следование – знаком $\Rightarrow$. Утверждение «Из A следует

B» кратко записывают $A \Rightarrow B$. В этой записи неявным образом присутствует квантор общности.

Если A и B – n-местные предикаты, то импликация $A \to B$ является также n-местным предикатом, а выражение $A \Rightarrow B$ определяет высказывание, которое истинно, если из A следует B, и ложно, если из A не следует B. Утверждение о том, что из A не следует B, записывают $A \not\Rightarrow B$. Вообще, перечеркнутый знак отношения означает, что указанные объекты (в нашем случае – предложения A и B) не находятся в данном отношении. Заметим, что знак операции перечеркивать некорректно. Например, бессмысленно писать $3 \not+ 5$.

Пусть имеется утверждение $A \Rightarrow B$. Предложение $B \Rightarrow A$ называется *обратным* по отношению к $A \Rightarrow B$.

Пример 1.4.1. Из того, что x больше 7, следует, что x больше 5. Символически $x>7 \Rightarrow x>5$. Действительно, любое число, большее 7, обязательно будет больше 5.

Однако обратное утверждение неверно: из того, что число больше 5, не следует, что это число больше 7. Например, число 6 больше 5, но не больше 7. Запишем: $x>5 \not\Rightarrow x>7$. •

Пример 1.4.2. Рассмотрим два предложения:

A = «Функция f положительна»,

B = «Производная функции f положительна».

В качестве допустимых значений переменной f берутся только дифференцируемые функции. Уточним, что функция f называется положительной, если при любом значении x из области определения значение $f(x)$ больше 0.

Поясним, что $A \not\Rightarrow B$. Для функции, заданной формулой $f(x) = x^2+1$, предложение A истинно, так как $\forall x\,(x^2+1>0)$, а предложение B ложно: $f'(x) = 2x$ и $f'(-1) = -2$, то есть производная функции f не является положительной.

Покажем, что $B \not\Rightarrow A$. Возьмем функцию, заданную формулой $f(x) = x^3+x$. Тогда $f'(x) = 3x^2+1$ – положительная функция, поэтому предложение B истинно. Так как $f(-1) = -2$, то предложение A ложно.

Таким образом, между предложениями A и B нельзя установить отношение следования. •

Пример 1.4.3. Рассмотрим предложения: $A = (x=y)$, $B = (x^3=y^3)$.

По свойствам равенства $A \Rightarrow B$. По свойствам степени с нечетным показателем верно и обратное утверждение: $B \Rightarrow A$.

В этом случае предикаты оказываются равносильными. Поэтому можно записать: $x = y \Leftrightarrow x^3 = y^3$. •

Пусть $A \Rightarrow B$. Тогда предложение A называется *достаточным условием* для B, а предложение B называется *необходимым условием* для A.

Пример 1.4.4. Так как $x>7 \Rightarrow x>5$, то неравенство $x>7$ есть достаточное условие для неравенства $x>5$, а неравенство $x>5$ – это необходимое условие для $x>7$. •

Используя термины «необходимо», «достаточно», утверждение о том, что из A следует B, формулируют с помощью следующих оборотов речи:

«Для того чтобы B, достаточно, чтобы A»,
«Для того чтобы A, необходимо, чтобы B».

Пример 1.4.5. Для того чтобы число было больше 5, достаточно, чтобы оно было больше 7. Для того чтобы число было больше 7, необходимо, чтобы оно было больше 5. •

Если $A \Leftrightarrow B$, то каждое из предложений A и B является и необходимым, и достаточным условием для другого предложения. При формулировке утверждений в этом случае используют словосочетание «необходимо и достаточно».

Пример 1.4.6. Пусть A = «Четырехугольник x является параллелограммом», B = «Диагонали четырехугольника x пересекаются и точкой пересечения делятся пополам».

В школьном курсе доказывается свойство параллелограмма: в любом параллелограмме диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Значит, $A \Rightarrow B$.

Справедлив также признак параллелограмма: произвольный четырехугольник, диагонали которого пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, является параллелограммом. Поэтому $B \Rightarrow A$.

Таким образом, имеем верное высказывание: для того чтобы четырехугольник являлся параллелограммом, необходимо и достаточно, чтобы его диагонали пересекались и точкой пересечения делились пополам. •

В заключение сделаем выводы по поводу того, как правильно обосновать истинность или ложность утверждения о том, что из A следует B.

Для простоты рассмотрим случай, когда предложения A и B зависят от одной переменной x.

Для доказательства того, что из $A(x)$ следует $B(x)$ ($A(x) \Rightarrow B(x)$), нужно взять произвольный объект x, удовлетворяющий свойству $A(x)$, и показать, что он обладает свойством $B(x)$.

Для доказательства того, что из $A(x)$ не следует $B(x)$ ($A(x) \not\Rightarrow B(x)$), нужно привести пример такого значения переменной x, при котором $A(x)$ истинно, а $B(x)$ ложно.

§ 2. Логическая структура предложений

2.1. Формулы логики

Мы не будем давать строгое определение формулы, так как в нашем курсе это определение мало влияет на понимание нижеследующего материала. Полное определение формулы (в логике высказываний и в логике предикатов) будет дано при изучении математической логики как отдельной дисциплины.

Под *формулой логики* понимается символическая запись предложения, содержащая буквы, обозначающие высказывания и предикаты, а также определенные в первом параграфе логические и математические символы. Например, $(A \vee B) \wedge \rceil C$, $\forall x(A(x) \rightarrow B(x))$, $(x>3) \vee (x<0)$. Символическая запись предложения позволяет наглядно выразить его строение, представить его более кратко и однозначно. Все это облегчает восприятие смысла предложения.

Формула, в общем случае, содержит два вида переменных: переменные, обозначающие предложения, и переменные, от которых зависят значения этих предложений. Первый вид переменных называют *предикатными переменными* (к ним относятся и переменные, обозначающие высказывания). Второй вид переменных называют *предметными переменными*.

Если в формулу P вместо предикатных переменных подставить конкретные предложения, то снова получим некоторое предложение C, возможно, зависящее от предметных переменных. В этом случае говорят, что предложение C имеет *логическое строение* (или *логическую структуру*, *форму*), выраженное формулой P.

Пример 2.1.1. Рассмотрим формулу $P = \exists x\ (A(x,y) \wedge B(x,y))$.

Возьмем вместо A предложение «x меньше y», вместо B – «x больше y», считая, что переменные x и y обозначают целые числа. Подставив в формулу P данные предложения, получим предложение C = «Найдется целое число, одновременно меньшее y и большее y».

Теперь подставим вместо A предложение «x делится на y», вместо B – «x – делитель y». Формула P в этом случае породит предложение D = «Найдется целое число, делящееся на y и являющееся делителем y».

Оба предложения C и D имеют логическую структуру, выраженную формулой P. Однако при любом целом значении y предложение C ложно, а предложение D истинно. •

Пусть формула не содержит предметных переменных. Тогда, подставив вместо предикатных переменных конкретные высказывания, формула примет одно из двух значений – истина (обозначается символом *и* или 1) или ложь (обозначается символом *л* или 0).

Тогда для того, чтобы найти значение формулы в зависимости от значений переменных высказываний, можно составить таблицу, называемую *таблицей истинности*.

Порядок выполнения действий при вычислении формулы определяется скобками. Часто некоторые скобки опускают. Введем общепринятое соглашение: если нет скобок, то вначале выполняется операция отрицания $\rceil$, затем операции конъюнкции и дизъюнкции $\wedge$, $\vee$, а затем операции импликации и эквиваленции $\to$, $\leftrightarrow$.

Пример 2.1.2. Построим таблицу истинности для формулы $(A\to\rceil B)\wedge(\rceil A\to B)$.

В первых двух столбцах таблицы выполним полный перебор значений переменных A и B. Каждый следующий столбец будет соответствовать логической операции. В последнем столбце получим значения формулы.

A	B	$\rceil B$	$A\to\rceil B$	$\rceil A$	$\rceil A\to B$	$(A\to\rceil B)\wedge(\rceil A\to B)$
и	*и*	*л*	*л*	*л*	*и*	*л*
и	*л*	*и*	*и*	*л*	*и*	*и*
л	*и*	*л*	*и*	*и*	*и*	*и*
л	*л*	*и*	*и*	*и*	*л*	*л*

Из таблицы видно, что формула принимает значение истины в двух случаях: A=*и*, B=*л* и A=*л*, B=*и*. Ясно, что перебор в первых двух столбцах можно выполнять в любом порядке, изменится лишь порядок строк таблицы. •

Подобные таблицы истинности удобно организовывать в сокращенном виде, когда результат операции заносится в столбец, записанный непосредственно под соответствующим знаком операции. Составим такую таблицу для приведенного примера формулы.

A	B	$(A$	$\to$	$\rceil B)$	$\wedge$	$(\rceil A$	$\to$	$B)$
и	*и*	*и*	*л*	*л*	*л*	*л*	*и*	*и*
и	*л*	*и*	*и*	*и*	*и*	*л*	*и*	*л*
л	*и*	*л*	*и*	*л*	*и*	*и*	*и*	*и*
л	*л*	*л*	*и*	*и*	*л*	*и*	*л*	*л*

Как видно, если формула содержит два переменных высказывания, то получается 4 возможные пары значений переменных. Если формула будет содержать три переменных, то получится 8 всевозможных троек.

На первых этапах рекомендуется составлять полный вариант таблицы. После определенной тренировки, на наш взгляд, сокращенный вариант предпочтительнее, так как занимает меньше место при длинных формулах.

Пример 2.1.3. Построим таблицу истинности для формулы $(A\to\rceil B\vee C)\wedge\rceil C\to\rceil A$. В первой строке укажем порядок выполнения операций.

				3	1	2		5	4	7	6
A	B	C	$(A$	$\to$	$\rceil B$	$\vee$	$C)$	$\wedge$	$\rceil C$	$\to$	$\rceil A$
и	*и*	*и*	*и*	*и*	*л*	*и*	*и*	*л*	*л*	*и*	*л*
и	*и*	*л*	*и*	*л*	*л*	*л*	*л*	*л*	*и*	*и*	*л*
и	*л*	*и*	*и*	*и*	*и*	*и*	*и*	*л*	*л*	*и*	*л*
и	*л*	*л*	*и*	*и*	*и*	*и*	*л*	*и*	*и*	*л*	*л*
л	*и*	*и*	*л*	*и*	*л*	*и*	*и*	*л*	*л*	*и*	*и*
л	*и*	*л*	*л*	*и*	*л*	*л*	*л*	*и*	*и*	*и*	*и*
л	*л*	*и*	*л*	*и*	*и*	*и*	*и*	*л*	*л*	*и*	*и*
л	*л*	*л*	*л*	*и*	*и*	*и*	*л*	*и*	*и*	*и*	*и*

Видим, что формула принимает значение лжи только в одном случае: A=*и*, B=*л*, C=*л*. Отметим, что, например, пятая операция выполняется по результатам операций с номерами 3 и 4, а последняя, седьмая операция – по результатам операций 5 и 6. •

Замечание. В данном изложении прослеживается различие между понятиями предложения и формулы. Мы привыкли называть предложением фразу, которая наполнена определенным содержанием, несет в себе понятный смысл. Формула же представляет собой последовательность знаков, построенную по определенным правилам. Придавая содержательный смысл этим знакам, формула, как говорят, получает определенную интерпретацию. Однако в современной математической логике термины «предложение» и «формула» часто используются как синонимы.

2.2. Символическая запись предложений

Рассмотрим основные типы предложений, встречающиеся в математических рассуждениях, и укажем их символическую запись.

Пусть $A(x)$ и $B(x)$ – произвольные предложения, зависящие от переменной x, при этом не исключается, что эти предложения могут содержать другие переменные.

Обозначим буквой P формулу, задающую логическое строение предложения: «Для любого x, такого, что $A(x)$, выполняется $B(x)$».

Данное предложение можно переформулировать следующим образом: «Для любого x если верно $A(x)$, то верно $B(x)$». Поэтому формула P имеет вид:

$$P = \forall x\ (A(x) \to B(x)).$$

Примеры предложений, логическая структура которых совпадает с P:

1) «Любое число, являющееся натуральным, больше 0» = *и*.

2) «Любое число, большее 0, является натуральным» = *л*.

3) «Любой треугольник, одна из медиан которого совпадает с высотой, является равнобедренным» = *и*.

4) «Любые два числа, произведение которых положительно, имеют одинаковые знаки» = *и*.

Например, предложение «Любое число, большее 0, является натуральным», символически может быть записано так:

$$\forall x\ (x>0 \to x \in \mathbf{N}).$$

Условие импликации часто записывают сразу после квантора. Поэтому встречаются следующие варианты записи:

$$\forall x,\ x>0\ (x \in \mathbf{N}) \text{ или } \forall x>0\ (x \in \mathbf{N}) \text{ или } (\forall x>0)(x \in \mathbf{N}).$$

Обозначим буквой Q формулу, задающую логическое строение предложения: «Существует x, такой, что $A(x)$, для которого $B(x)$».

Данное предложение можно переформулировать следующим образом: «Существует x, для которого верно $A(x)$ и при этом верно $B(x)$». Поэтому формула P имеет вид:

$$P = \exists x\ (A(x) \wedge B(x)).$$

Примеры предложений, логическая структура которых совпадает с Q:

1) «Существует отрицательное число, большее единицы» = *л*.

2) «Существует дифференцируемая на всей числовой прямой функция f, отличная от константы, для которой выполняется равенство $f^2 = f$» = *л*.

3) «Существует параллелограмм, имеющий две неравные стороны, около которого можно описать окружность» = *и*.

4) «Существуют два числа, имеющие разные знаки, сумма которых больше их произведения» = *и*.

В формуле P знак конъюнкции нельзя заменить на импликацию, иначе получится формула, имеющая совсем другой логический смысл. Для примера обозначим $A(x) = (x<0)$, $B(x) = (x>1)$. Предложение «Существует отрицательное число, большее единицы» ложно, так как любое отрицательное число меньше 0, значит, меньше 1. Однако формула $\exists x\ (x<0 \to x>1)$ обозначает истинное высказывание, так как существует значение x, например, равное 2, при котором импликация истинна (посылка $2<0$ ложна).

В общем случае формулу $\forall x\ (A(x) \to B(x))$ кратко можно записывать как $\forall x_{A(x)}\, B(x)$, а формулу $\exists x\ (A(x) \wedge B(x))$ – как $\exists x_{A(x)}\, B(x)$. Кванторы, записанные в выражениях $\forall x_{A(x)}\, B(x)$ и $\exists x_{A(x)}\, B(x)$, называют *ограниченными*. Множество всех значений переменной x, для которых выполняется $A(x)$, можно понимать как область допустимых значений.

На языке ограниченных кванторов запишем предложение: «Ни для одного x, такого, что $A(x)$, не выполняется $B(x)$». Это предложение может быть сформулировано следующим образом: «Для любого x, если $A(x)$, то неверно, что $B(x)$». Поэтому данное предложение имеет такую структуру: $\forall x (A(x) \to \rceil B(x))$ или, кратко, $\forall x_{A(x)} \rceil B(x)$.

Пример 2.2.1. «Ни один прямоугольник не является трапецией». Здесь $A(x)$ = «Четырехугольник x есть прямоугольник», $B(x)$ = «Четырехугольник x есть трапеция». •

Ограничение $A(x)$ может иметь сложный вид и представлять собой, например, конъюнкцию утверждений. Тогда ограничения перечисляются через запятую, а квантор вместе с указанными ограничениями заключается в скобки, что улучшает восприятие формулы.

Рассмотрим примеры предложений, в которых одновременно встречаются оба вида ограниченных кванторов.

Пример 2.2.2. «Найдется такое положительное рациональное число a, что все положительные числа, меньшие a, будут иррациональными».

Используя ограниченные кванторы, данное предложение можно записать следующим образом:

$$(\exists a>0,\ a\in\mathbf{Q})\ (\forall x>0,\ x<a)\ (x\in\mathbf{I}).$$

Здесь $\mathbf{Q}$ обозначает множество всех рациональных чисел, а $\mathbf{I}$ – множество всех иррациональных чисел.

Скобки в формуле можно опустить, однако, как уже было сказано, они в определенной мере улучшают восприятие данной формулы.

Расписав ограниченные кванторы, получим следующую формулу:

$$\exists a\ (a>0 \wedge a\in\mathbf{Q} \wedge \forall x\ (x>0 \wedge x<a \rightarrow x\in\mathbf{I})).\ \bullet$$

Пример 2.2.3. «При любом положительном числе ε существует такое положительное число c, что при всех x, по модулю больших c, значение $\left|\frac{1}{x}\right|$ будет меньше ε».

Символическая запись предложения имеет вид:

$$(\forall\varepsilon>0)\ (\exists c>0)\ (\forall x, |x|>c)\ \left(\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon\right),\text{ или, по-другому,}$$

$$(\forall\varepsilon>0)\ (\exists c>0)\ (\forall x)\ \left(|x|>c\rightarrow\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon\right).$$

Математический смысл предложения таков: предел функции $y=\frac{1}{x}$, когда x стремится к бесконечности, равен 0. •

2.3. Равносильные формулы

В первом параграфе было дано понятие равносильных предложений. Аналогичным образом можно понимать равносильность формул. Рассмотрим вначале случай, когда формулы зависят только от переменных, вместо которых можно подставлять конкретные высказывания.

Обозначим буквами P и Q две произвольные формулы.

Формулы P и Q называются *равносильными* (или логически равными), если при любых значениях переменных эти формулы принимают одинаковые истинностные значения.

Пример 2.3.1. Формула $(A\to\neg B)\wedge(\neg A\to B)$, рассмотренная в примере 2.1.1, равносильна формуле $\neg(A\leftrightarrow B)$. Построим для последней формулы таблицу истинности.

A	B	$A\leftrightarrow B$	$\neg(A\leftrightarrow B)$
и	*и*	*и*	*л*
и	*л*	*л*	*и*
л	*и*	*л*	*и*
л	*л*	*и*	*л*

Видим, что формула $\neg(A\leftrightarrow B)$, как и формула $(A\to\neg B)\wedge(\neg A\to B)$, принимает значение истины только в двух случаях: A=*и*, B=*л* и A=*л*, B=*и*. Если изобразить две таблицы рядом и сохранить порядок записи строк, то столбцы значений этих формул совпадут. •

Таким же способом можно доказать равносильность формул $A\leftrightarrow B$ и $(A\to B)\wedge(A\to B)$, что уже было установлено при определении операции эквиваленции.

Упражнение. В примере 2.2.1 была построена таблица истинности формулы $(A\to\neg B\vee C)\wedge\neg C\to\neg A$. Докажите, что эта формула равносильна более простой формуле $A\to B\vee C$.

Отношение равносильности тесно связано с операцией эквиваленции. Пусть формулы P и Q равносильны. Образуем новую формулу $P\leftrightarrow Q$. Эта формула будет принимать уже только истинные значения. Действительно, если формула примет значение лжи при некоторых значениях переменных, значит, в этом случае формулы P и Q принимают разные значения (по определению операции $\leftrightarrow$), чего не может быть по причине равносильности этих формул. И наоборот, если формула $P\leftrightarrow Q$ принимает только истинные значения, значит, формулы P и Q равносильны.

Для обозначения равносильных формул будем использовать знак $\equiv$ (подобно знаку равенства = для алгебраических выражений). Тогда предложение «Формулы P и Q равносильны» можно записать кратко: $P\equiv Q$.

В приведенных выше рассуждениях мы столкнулись с возможностью, когда формула принимает только истинное значение, независимо от значений переменных, от которых зависит формула. Эти формулы имеют большой интерес для логики, так как, подставляя вместо букв в формулу конкретные предложения с произвольным содержанием, всегда будем получать истинное утверждение. Такие формулы называются тавтологиями.

Тавтологией (или *законом логики*) называется формула, принимающая значение истины при любых значениях переменных.

Пример 2.3.2. Убедимся, что формула $(A \to B) \wedge A \to B$ является тавтологией. Для этого составим таблицу истинности.

			1		2		3	
A	B	$(A$	$\to$	$B)$	$\wedge$	A	$\to$	B
и	*и*	*и*	*и*	*и*	*и*	*и*	*и*	*и*
и	*л*	*и*	*л*	*л*	*л*	*и*	*и*	*л*
л	*и*	*л*	*и*	*и*	*л*	*л*	*и*	*и*
л	*л*	*л*	*и*	*л*	*л*	*л*	*и*	*л*

Тавтологиями также являются следующие формулы:

$$A \vee \rceil A, \quad (A \to B) \wedge \rceil B \to \rceil A, \quad (A \to B) \wedge (B \to C) \to (A \to C).$$

Упражнение. Постройте таблицы истинности для указанных формул и убедитесь, что это тавтологии.

На языке тавтологий можно выразить понятие равносильности: равносильность формул P и Q означает, что формула $P \leftrightarrow Q$ является тавтологией.

Мы привели примеры формул, зависящих только от переменных высказываний. Однако суть данных определений не изменится, если формула будет содержать предикатные переменные, а также предметные переменные и знаки кванторов. Надо только учесть, что если формула содержит предметные переменные, то вместо них можно подставлять лишь значения, которые допустимы для выбранного предиката. Существенная разница заключается в том, что в общем случае мы не можем построить таблицу истинности, так как предметные переменные часто могут принимать бесконечно много значений.

Рассмотрим для примера формулы $\rceil(\forall x A(x))$ и $\exists x \rceil A(x)$. Они равносильны, так как, взяв вместо буквы A любой предикат, зависящий от x, мы получим одинаковые по логическому значению высказывания. Предложение «Неверно, что все допустимые значения x удовлетворяют свойству $A(x)$» означает то же, что предложение «Существует x, при котором свойство $A(x)$ не выполняется». Итак, $\urcorner(\forall x A(x)) \equiv \exists x \urcorner A(x)$. Аналогичными рассуждениями можно показать, что $\urcorner(\exists x A(x)) \equiv \forall x \urcorner A(x)$.

§ 3. Законы логики

Часто бывает необходимо переформулировать предложение, сохранив его логический смысл, то есть построить предложение, равносильное исходному утверждению. Например, формулировка предложения в виде «неверно, что A» не всегда удобна, тем более в случае, когда A содержит много логических связок. Поэтому всегда стараются сформулировать отрицание в так называемой *позитивной форме*, то есть в форме предложения, в котором отрицание относится не ко всему предложению, а к его составляющим, которые уже не содержат логических связок.

Пусть даны два предложения, логическое строение которых выражается формулами P и Q. Если формулы P и Q равносильны, то равносильными будут и данные предложения. Поэтому, для того чтобы обосновать равносильность конкретных предложений, вначале можно записать их логическую структуру в виде формул, а затем показать, что полученные формулы равносильны.

Сформулируем основные законы, позволяющие от одной формулы перейти к другой формуле, равносильной исходной. Ранее было замечено, что предложение «Формулы P и Q равносильны» можно понимать как утверждение о том, что формула $P \leftrightarrow Q$ является тавтологией.

3.1. Законы построения отрицания

Приведем основные пары равносильных формул, позволяющие строить отрицания к предложениям, содержащим всевозможные логические связки. Каждый закон будем иллюстрировать содержательным примером.

Пусть буквы A и B обозначают произвольные предложения.

1°. Закон двойного отрицания. *Отрицание к отрицанию A равносильно A*:

$$\urcorner(\urcorner A) \equiv A.$$

Этот закон очевидным образом вытекает из определения операции отрицания.

Пример 3.1.1. Предложение «Неверно, что число (–2) не целое» означает, что число (–2) целое. •

2°. Отрицание к дизъюнкции. *Отрицание к дизъюнкции A и B равносильно конъюнкции отрицаний A и B*:

$$\rceil(A\vee B)\equiv\rceil A\wedge\rceil B.$$

Докажем это правило с помощью построения таблицы истинности.

A	B	$A\vee B$	$\rceil(A\vee B)$		$\rceil A$	$\wedge$	$\rceil B$
и	*и*	*и*	*л*		*л*	*л*	*л*
и	*л*	*и*	*л*		*л*	*л*	*и*
л	*и*	*и*	*л*		*и*	*л*	*л*
л	*л*	*л*	*и*		*и*	*и*	*и*

Пример 3.1.2. Построим отрицание к предложению «Функция является четной или нечетной», которое имеет структуру $A\vee B$, где A = «Функция является четной», B = «Функция является нечетной».

Отрицание: «Функция не является четной и не является нечетной».

В данном примере предложение B не является отрицанием A. Можно привести пример функции, при котором отрицание является верным высказыванием. •

А вот предложение вида «A или не A», где фраза «не A» понимается именно как отрицание к A, всегда принимает истинное значение, так как формула $A\vee\rceil A$ есть тавтология. Тогда отрицание к этому предложению всегда ложно. По первым двум правилам отрицание формулируется так: «Не A и A». Здесь утверждается, что предложение A одновременно ложно и истинно, чего не может быть.

3°. Отрицание к конъюнкции. *Отрицание к конъюнкции A и B равносильно дизъюнкции отрицаний A и B*:

$$\rceil(A\wedge B)\equiv\rceil A\vee\rceil B.$$

Докажите этот закон самостоятельно.

Пример 3.1.3. Дано предложение: «Число больше 0, но меньше 5». Отрицание: «Число не больше 0 или не меньше 5». Символически это запишется так:

$$\rceil((a>0)\wedge(a<5))\equiv(a\leq 0)\vee(a\geq 5).\ \bullet$$

Вывод: при построении отрицания к предложениям «A и B» и «A или B» союзы «и» и «или» меняются друг на друга.

Сформулированные правила построения отрицания к конъюнкции и дизъюнкции называются *законами де Моргана* (Огастес де Морган – шотландский математик, 1806–1871).

Наряду с законом 3° часто бывает полезно применить другой закон.

4°. Выражение отрицания к конъюнкции через импликацию

$$\neg(A \wedge B) \equiv A \rightarrow \neg B.$$

Докажите этот закон самостоятельно.

Тогда отрицание к предложению «Число больше 0, но меньше 5» можно сформулировать так: «Если число больше 0, то оно не меньше 5».

5°. Отрицание к импликации

$$\neg(A \rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B.$$

Докажите самостоятельно.

Пример 3.1.4. Дано предложение: «Если число рациональное, то оно целое». Отрицание: «Число рациональное, но не целое». •

Заметим, что правила 4° и 5° являются взаимно двойственными в том смысле, что, взяв любое из правил и заменив знаки $\wedge$ и $\rightarrow$ друг на друга, мы получим другое правило данной пары.

Рассмотрим пример на использование нескольких законов.

Пример 3.1.5. Петя пообещал, что сегодня вечером при условии, если Катя не позовет его в кино, он сделает домашнее задание или посмотрит телевизор. В каких случаях Петя не выполнит данное им обещание?

Запишем обещание Пети формулой. Для этого введем обозначения предложений.

A = «Катя позовет Петю в кино»,

B = «Петя выполнит домашнее задание»,

C = «Петя посмотрит телевизор».

Теперь обещание Пети можно выразить формулой: $\neg A \rightarrow B \vee C$.

Построим и преобразуем отрицание, используя вначале правило 5°, затем правило 2°:

$$\neg(\neg A \rightarrow B \vee C) \equiv \neg A \wedge \neg(B \vee C) \equiv \neg A \wedge (\neg B \wedge \neg C).$$

Таким образом, Петя не выполнит обещание в одном случае: Катя не позовет его в кино, но он не выполнит домашнее задание и не посмотрит телевизор. •

6°. Отрицания к кванторам

$$\neg(\forall x A(x)) \equiv \exists x \neg A(x) \text{ и } \neg(\exists x A(x)) \equiv \forall x \neg A(x).$$

Равносильность указанных формул была обоснована в предыдущем параграфе.

Пример 3.1.6. Рассмотрим множество учеников некоторого класса. Пусть $A(x)$ обозначает предложение: «Ученик x отличник».

Тогда предложение «Неверно, что все ученики класса отличники» (или, по-другому, «Не все ученики класса отличники») равносильно утверждению «В классе найдется ученик, не являющийся отличником». А предложение «В классе не существует отличника» означает, что любой ученик класса не является отличником.

Интересно отметить, что если мы имеем в виду не какой-то конкретный класс, то предложение A является двуместным предикатом. Другая переменная в этом случае будет обозначать класс какой-то школы. Однако рассмотренные законы не зависят от того, сколько переменных содержится в предложении A. И вообще, вместо букв A и B в рассмотренные выше законы можно подставлять любые формулы. •

Пусть требуется опровергнуть утверждение, заданное формулой $\forall x A(x)$ (то есть доказать, что это утверждение ложно). Для этого надо доказать, что истинно его отрицание, которое в соответствии с законом 6° имеет вид $\exists x \neg A(x)$. Значит, нужно привести пример хотя бы одного объекта x, для которого предложение $A(x)$ неверно. Такой объект называется *контрпримером* к утверждению $\forall x A(x)$.

Пример 3.1.7. Опровергнем утверждение «Все целые числа положительны». Контрпример: целое число (–3) не является положительным. Есть другие примеры целых неположительных чисел. Но для полного доказательства достаточно только одного контрпримера. •

На основе рассмотренных законов можно выработать общие правила формулировки отрицания к типам предложений, рассмотренных в пункте 2.2.

Пусть имеется предложение: «Для любого x, такого, что $A(x)$, выполняется $B(x)$». Для того чтобы сформулировать отрицание к этому предложению, построим отрицание к формуле $\forall x\, (A(x) \to B(x))$. Последовательно применим законы 6° и 5°:

$$\neg(\forall x\, (A(x) \to B(x))) \equiv \exists x \neg(A(x) \to B(x)) \equiv \exists x\, (A(x) \wedge \neg B(x)).$$

Получим предложение: «Существует x, такое, что $A(x)$, для которого неверно, что $B(x)$».

Пусть имеется предложение: «Существует x, такое, что $A(x)$, для которого $B(x)$». Для того чтобы сформулировать отрицание к этому предложению, построим отрицание к формуле $\exists x\,(A(x)\wedge B(x))$. Последовательно применим законы 6° и 4°:

$$\urcorner(\exists x\,(A(x)\wedge B(x))) \equiv \forall x\,\urcorner(A(x)\wedge B(x)) \equiv \forall x\,(A(x)\to \urcorner B(x)).$$

Получим предложение: «Ни для одного x, такого, что $A(x)$, не выполняется $B(x)$».

На языке ограниченных кванторов имеем следующее правило.

7°. *При построении отрицания к предложениям вида* $\forall x_{A(x)} B(x)$ *и* $\exists x_{A(x)} B(x)$ *знаки кванторов меняются друг на друга, отрицание переносится на предикат* $B(x)$, *а ограничение* $A(x)$ *остается неизменным*:

$$\urcorner(\forall x_{A(x)} B(x)) \equiv \exists x_{A(x)} \urcorner B(x) \quad \text{и} \quad \urcorner(\exists x_{A(x)} B(x)) \equiv \forall x_{A(x)} \urcorner B(x).$$

Пример 3.1.8. Построим отрицания к предложениям и выясним, какие из них верны, а какие ложны:

а) Любое целое число, делящееся на 6, делится на 4.

б) Некоторые числа, делящиеся на 6, делятся на 4.

Для решения поставленной задачи введем два предиката, определенных для целых чисел:

$A(x)$ = «x делится на 6» или, используя знак делимости, $A(x) = (x \vdots 6)$,

$B(x)$ = «x делится на 4» = $(x \vdots 4)$.

Пункт а). Имеем формулу $\forall x\,(A(x)\to B(x))$. Отрицание к ней имеет вид $\exists x\,(A(x)\wedge \urcorner B(x))$.

Формулируем отрицание: «Существует целое число, делящееся на 6, но не делящееся на 4».

Так как существует число 18, делящееся на 6, но не на 4, то отрицание предложения является истинным высказыванием, а исходное предложение – ложным.

Пункт б). Предложение имеет логическую структуру $\exists x\,(A(x)\wedge B(x))$. Отрицание к формуле имеет вид $\forall x\,(A(x)\to \urcorner B(x))$.

Формулируем отрицание: «Любое целое число, делящееся на 6, не делится на 4».

Здесь исходное предложение верно, так как, например число 12 делится и на 6, и на 4. Отрицание к предложению ложно. •

Пример 3.1.9. Построим отрицание к предложению из примера 2.2.2. Предложение «Найдется такое положительное рациональное число a, что все положительные числа, меньшие a, будут иррациональными» имеет символическую запись $(\exists a>0, a\in\mathbf{Q})\ (\forall x>0, x<a)\ (x\in\mathbf{I})$. Строим отрицание по правилу 7°: $(\forall a>0, a\in\mathbf{Q})\ (\exists x>0, x<a)\ \rceil(x\in\mathbf{I})$. Утверждение «Действительное число не является иррациональным» равносильно утверждению «Число рациональное». Поэтому формулу можно переписать так:

$$(\forall a>0, a\in\mathbf{Q})\ (\exists x>0, x<a)\ (x\in\mathbf{Q}).$$

Сформулируем отрицание: «Для любого положительного рационального числа a существует положительное число, меньшее a, являющееся рациональным».

Отрицание является истинным высказыванием, так как какое бы положительное рациональное число a мы не взяли, положим, что $x=a/2$. Число x очевидно положительное, меньше a. При этом x рациональное, как частное от деления двух рациональных чисел. Таким образом, исходное утверждение неверно. •

Пример 3.1.10. Построим отрицание к предложению из примера 2.2.3.

Предложение «При любом положительном числе ε существует такое положительное число c, что при всех x, по модулю больших c, значение $\left|\frac{1}{x}\right|$ будет меньше ε» записывается формулой: $(\forall\varepsilon>0)\ (\exists c>0)\ (\forall x, |x|>c)\ \left(\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon\right)$.

Заметим, что это предложение верно. Действительно, при любом ε возьмем $c = 2/\varepsilon$. Тогда для любого значения x, которое по модулю будет больше c, выполняется неравенство $|1/x|<1/c$. Так как $c = 2/\varepsilon$, то $1/c = 0{,}5\varepsilon$, что меньше ε. Значит, выражение $|1/x|$ будет меньше ε.

Строим отрицание:

$$(\exists\varepsilon>0)\ (\forall c>0)\ (\exists x, |x|>c)\ \left(\left|\frac{1}{x}\right|\geq\varepsilon\right),$$

читаемое так: «Существует такое положительное число ε, что при любом положительном числе c найдется число x, по модулю большее c, для которого число $\left|\frac{1}{x}\right|$ будет не меньше ε».

Так как было доказано, что исходное предложение верно, значит, отрицание является ложным утверждением.

Итак, для того чтобы опровергнуть некоторое предложение, то есть доказать, что оно ложно, можно сформулировать отрицание к этому предложению и доказать его истинность. •

3.2. Правило контрапозиции

Это правило позволяет переформулировать предложение вида «Если A, то B». Рассмотрим такое предложение: P = «Если четырехугольник является ромбом, то его диагонали перпендикулярны». Выясним, какие из следующих предложений равносильны данному предложению:

F = «Если четырехугольник не является ромбом, то его диагонали не перпендикулярны»;

Q = «Если диагонали четырехугольника не перпендикулярны, то это не ромб».

Для ответа на поставленный вопрос введем обозначения: A = «Четырехугольник является ромбом», B = «диагонали четырехугольника перпендикулярны». Тогда исходное предложение задается формулой $A \to B$, предложение F – формулой $\urcorner A \to \urcorner B$, а предложение Q – формулой $\urcorner B \to \urcorner A$.

Построим таблицу истинности для этих формул.

A	B	A	$\to$	B		$\urcorner A$	$\to$	$\urcorner B$		$\urcorner B$	$\to$	$\urcorner A$
и	*и*	*и*	*и*	*и*		*л*	*и*	*л*		*л*	*и*	*л*
и	*л*	*и*	*л*	*л*		*л*	*и*	*и*		*и*	*л*	*л*
л	*и*	*л*	*и*	*и*		*и*	*л*	*л*		*л*	*и*	*и*
л	*л*	*л*	*и*	*л*		*и*	*и*	*и*		*и*	*и*	*и*

Видим, что предложения P и Q равносильны, а предложение F им не равносильно. Тот факт, что предложения P и F имеют разный логический смысл, был замечен еще в пункте 1.3. Там были приведены примеры с другим содержанием, однако имеющие такую же логическую структуру.

Если вникнуть в содержание данного примера, то можно заметить, что предложение P принимает истинное значение для любого четырехугольника, что следует из свойств ромба. Так как предложения P и Q равносильны, то, не задумываясь, можно утверждать, что предложение Q всегда принимает истинное значение. А вот предложение F таким свойством не обладает. Можно привести пример четырехугольника с разными сторонами (то есть пример не ромба), диагонали которого перпендикулярны. Приведите пример такого четырехугольника.

Сформулируем *правило контрапозиции. Предложение «Если A, то B» равносильно предложению «Если не B, то не A»*:

$$A \to B \equiv \rceil B \to \rceil A.$$

Пример 3.2.1. По правилу контрапозиции равносильны предложения: «Если натрий металл, то он пластичен» и «Если натрий не пластичен, то он не металл». •

Пример 3.2.2. Переформулируем на основе правила контрапозиции предложение: «Если числа x и y четные, то сумма $x+y$ – четное число».

Сразу заметим, что данное предложение истинно для любых целых чисел x и y, так как, взяв произвольные четные числа x и y, будем иметь $x=2n$, $y=2k$, для некоторых целых чисел n и k. Тогда сумма чисел x и y будет иметь вид $x+y = 2n+2k = 2(n+k)$ – четное число.

Данное предложение имеет вид импликации, посылка которой «Числа x и y четные» является конъюнкцией высказываний «Число x четное» и «Число y четное». Учитывая это, введем обозначения:

A = «Число x четное»,

B = «Число y четное»,

C = «Сумма чисел x и y есть четное число».

Тогда логическая структура предложения имеет вид $A \wedge B \to C$. По правилу контрапозиции эта формула равносильна $\rceil C \to \rceil(A \wedge B)$. Построив отрицание к конъюнкции, получим формулу $\rceil C \to \rceil A \vee \rceil B$.

Получили, что $A \wedge B \to C \equiv \rceil C \to \rceil A \vee \rceil B$.

Итак, исходное предложение равносильно следующему: «Если сумма $x+y$ является нечетным числом, то хотя бы одно из чисел x или y является нечетным». •

Заметим, что если бы в предыдущем примере мы не поменяли союз «и» на союз «или», то получили бы неравносильное предложение: «Если сумма $x+y$ является нечетным числом, то числа x и y нечетные». Эта импликация ложна, например, для чисел $x=3$, $y=4$ (сумма чисел равна 7, но число 4 четное), а исходное предложение, как было отмечено в самом начале, всегда истинно.

Пример 3.2.3. Докажем, что предложение «Некоторые нечетные числа делятся на 4» неверно.

Обозначим $A(x)$ = «x – нечетное число», $B(x)$ = «x делится на 4».

Сформулируем отрицание к исходному предложению: «Ни одно нечетное число не делится на 4». На языке формул отрицание имеет вид $\forall x\ (A(x)\to \rceil B(x))$.

Преобразуем формулу $A\to \rceil B$ с помощью правила контрапозиции и закона двойного отрицания:

$$A\to \rceil B \equiv \rceil(\rceil B)\to \rceil A \equiv B\to \rceil A.$$

Поэтому формула $\forall x\ (A(x)\to \rceil B(x))$ равносильна $\forall x\ (B(x)\to \rceil A(x))$. Тогда отрицание можно переформулировать следующим образом: «Любое число, делящееся на 4, является четным», что очевидно является истинным утверждением, так как любое число вида x=4n, где n – целое число, можно записать x=2(2n)=2k, где k=2n есть целое число. •

3.3. Свойства операций конъюнкции и дизъюнкции

Операции конъюнкции и дизъюнкции обладают рядом свойств, некоторые из них аналогичны свойствам операций сложения и умножения над числами. Например, тождествами являются следующие равенства (a и b – действительные числа):

$a+b = b+a$, $a\cdot b = b\cdot a$. Это свойство называют коммутативным (или переместительным) законом.

$(a+b)+c = a+(b+c)$, $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$. Это свойство называют ассоциативным (или сочетательным) законом.

Операции + и · связаны дистрибутивным (или распределительным) законом: $a\cdot(b+c) = a\cdot b+a\cdot c$. Говорят, что умножение дистрибутивно относительно сложения.

Однако, поменяв в равенстве местами знаки + и ·, получим равенство $a+(b\cdot c) = (a+b)\cdot(a+c)$, не являющееся тождеством. Контрпример: a=1, b=2, c=3, тогда $a+(b\cdot c) = 1+2\cdot3 = 7$, но $(a+b)\cdot(a+c) = (1+2)\cdot(1+3) = 12$. Таким образом, сложение не дистрибутивно относительно умножения.

Для конъюнкции и дизъюнкции справедливы все указанные выше свойства, при этом каждая из операций конъюнкции и дизъюнкции дистрибутивна по отношению к другой операции. Запишем указанные законы и приведем ряд других.

1°. *Коммутативные законы*: $A\wedge B \equiv B\wedge A$, $A\vee B \equiv B\vee A$.

2°. *Ассоциативные законы*: $(A\wedge B)\wedge C \equiv A\wedge(B\wedge C)$, $(A\vee B)\vee C \equiv A\vee(B\vee C)$.

3°. *Дистрибутивные законы*:

$A\wedge(B\vee C) \equiv (A\wedge B)\vee(A\wedge C)$ – дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции,

$A\vee(B\wedge C) \equiv (A\vee B)\wedge(A\vee C)$ – дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции.

4°. *Законы идемпотентности*: $A\wedge A \equiv A$, $A\vee A \equiv A$.

5°. *Законы поглощения*: $A\wedge(A\vee B) \equiv A$, $A\vee(A\wedge B) \equiv A$.

6°. *Законы с константами*: $A\vee и \equiv и$, $A\wedge и \equiv A$, $A\vee л \equiv A$, $A\wedge л \equiv л$.

Вместо букв A, B и C можно подставлять любые формулы.

Пример 3.3.1. Рассмотрим формулу $(x>0)\vee((x<2)\wedge(x>0))$.

Обозначим $A = (x>0)$, $B = (x<2)$. Упростим формулу, применяя последовательно законы 1° и 5°:

$$A\vee(B\wedge A) \equiv A\vee(A\wedge B) \equiv A.$$

Таким образом, исходная формула равносильна $(x>0)$. •

Пример 3.3.2. Рассмотрим предложение: «Функция *f* положительная и возрастающая, или *f* положительная и убывающая».

Напомним вначале понятие положительной функции. Функция *f* называется положительной, если она принимает положительные значения при всех значениях аргумента из области определения: $\forall x \in D_f\,(f(x) > 0)$. Запишите символически определения возрастающей и убывающей функций.

Введем обозначения:

A = «Функция *f* положительная»,

B = «Функция *f* возрастает»,

C = «Функция *f* убывает».

Исходное предложение выражается формулой $(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$. По закону 3° эта формула равносильна $A\wedge(B\vee C)$.

Таким образом, исходное предложение можно переформулировать следующим образом: «Функция *f* положительная и при этом возрастает или убывает». •

Рассмотрим взаимосвязь операций конъюнкции и дизъюнкции с кванторными операциями.

Пример 3.3.3. Определим значения двух формул:

$$P = \forall x\in\mathbf{R}\ (x>0 \vee x<1) \quad \text{и} \quad Q = (\forall x\in\mathbf{R}\ (x>0) \vee \forall x\in\mathbf{R}\ (x<1)).$$

Сформулируем предложения, выражаемые этими формулами.

P = «Любое действительное число больше 0 или меньше 1».

Q = «Любое действительное число больше 0 или любое действительное число меньше 1».

Предложение P истинно, так как всякое действительное число попадет в интервал $(-\infty; 1)$ или $(0; +\infty)$, поскольку их объединение дает все множество **R**.

Предложение Q ложно, так как оба высказывания $\forall x \in \mathbf{R}\,(x>0)$ и $\forall x \in \mathbf{R}\,(x<1)$ ложны. Действительно, существование отрицательного числа $x=-1$ опровергает первое утверждение, а существование числа $x=2$ опровергает второе утверждение.

Итак, предложения P и Q не равносильны. •

Этот пример показывает, что формулы $\forall x\,(A(x) \vee B(x))$ и $\forall x A(x) \vee \forall x B(x)$ (в общем случае) не равносильны.

Можно привести контрпример, опровергающий равносильность формул $\exists x\,(A(x) \wedge B(x))$ и $\exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$. Однако заметим, что предложения из примера 3.3.3 не опровергают эту равносильность. Приведите контрпример самостоятельно.

Итак, в формулах $\forall x\,(A(x) \vee B(x))$ и $\exists x\,(A(x) \wedge B(x))$ нельзя внести кванторы в скобки. В некоторых случаях эта процедура возможна.

Докажем, что формулы $\forall x\,(A(x) \wedge B(x))$ и $\forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$ равносильны.

Пусть формула $\forall x\,(A(x) \wedge B(x))$ принимает истинное значение. Значит, при всех x истинна конъюнкция $A(x) \wedge B(x)$. Возьмем произвольное значение переменной x, обозначим его x_1. Тогда $A(x_1) \wedge B(x_1)=u$, поэтому $A(x_1)=u$, $B(x_1)=u$. Итак, для любого значения x верно $A(x)$, то есть истинно высказывание $\forall x A(x)$, и для любого значения x верно $B(x)$, то есть истинно высказывание $\forall x B(x)$. Отсюда заключаем, что верна конъюнкция $\forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$.

Проведем обратное рассуждение. Пусть формула $\forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$ принимает истинное значение. Поэтому для всех значений x верно $A(x)$ и для всех значений x верно $B(x)$. Возьмем произвольное значение переменной x, обозначим его x_1. Тогда $A(x_1)=u$, $B(x_1)=u$, поэтому $A(x_1) \wedge B(x_1)=u$. Получаем, что при любом значении x верно $A(x) \wedge B(x)$, то есть истинно предложение $\forall x\,(A(x) \wedge B(x))$.

Таким образом, доказано еще одно свойство. Запишем его.

7°. $\forall x\,(A(x) \wedge B(x)) \equiv \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$.

Имеет место аналогичное свойство, позволяющее внести квантор существования в скобки, в которых стоит дизъюнкция формул.

8°. $\exists x\,(A(x) \vee B(x)) \equiv \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$.

Докажите этот закон самостоятельно.

§ 4. Теоремы и аксиомы

4.1. Логическая структура теоремы

Теорема – это истинное предложение, которое требует доказательства.

Наиболее часто встречаются теоремы, имеющие следующую логическую структуру:

$$\forall z\,(A(z) \rightarrow B(z)).$$

У такой теоремы можно выделить следующие части.

1) *Разъяснительная часть*. Здесь указываются множества объектов, о которых говорится в теореме. Переменная z обозначает объекты из данных множеств. При этом переменная может обозначать один объект или несколько.

2) *Условие теоремы* (то, что дано) – предикат $A(z)$.

3) *Заключение теоремы* (то, что требуется доказать) – предикат $B(z)$.

В общем случае предикаты A и B могут иметь сложную структуру и являться, например, конъюнкцией или дизъюнкцией предложений.

При формулировке теоремы условие и разъяснительную часть часто объединяют в одно предложение, которое начинается со слова «пусть». Формулировку заключения начинают со слов «тогда», «в этом случае» и т. п.

Пример 4.1.1. Рассмотрим теорему Виета для приведенного квадратного уравнения.

«Пусть дано приведенное квадратное уравнение $x^2+px+q=0$, которое имеет два действительных корня. Тогда произведение корней равно q, а сумма корней равна коэффициенту $(-p)$».

Проведем анализ теоремы. В ней рассматриваются следующие объекты: приведенное квадратное уравнение (обозначим его буквой u) и два числа x_1, x_2.

Условие $A(u, x_1, x_2)$ = «x_1, x_2 – корни уравнения u».

Заключение $B(u, x_1, x_2)$ = «Сумма чисел x_1 и x_2 равна свободному члену уравнения u, а произведение этих чисел – коэффициенту при переменной x, взятому с противоположным знаком».

Для краткости формулировки в условии сразу указан общий вид приведенного квадратного уравнения. Это позволяет записать заключение, используя введенные обозначения коэффициентов уравнения.

Запишем теорему на языке формул:

$$\forall u \forall x_1 \forall x_2\, (A(u, x_1, x_2) \rightarrow B(u, x_1, x_2)). \bullet$$

Как видно из примера, при формулировке теоремы кванторные слова «для всякого объекта», как правило, опускают. Если теорема не слишком объемна, то ее часто формулируют по схеме «Если A, то B».

Пример 4.1.2. Сформулируем теорему Виета на языке «если, то».

«Если x_1, x_2 – действительные корни уравнения $x^2+px+q=0$, то $x_1 \cdot x_2 = q$ и $x_1+x_2 = -p$».

Отделив разъяснительную часть от импликации, теорему можно сформулировать так: «Пусть дано квадратное уравнение $x^2+px+q=0$, где p и q – действительные числа. Если x_1, x_2 – действительные корни этого уравнения, то $x_1 \cdot x_2 = q$ и $x_1+x_2 = -p$». •

Итак, любую теорему вида $\forall z\, (A(z) \rightarrow B(z))$ кратко можно сформулировать в одной из следующих форм.

(1) «Пусть A, тогда B», или «Всегда, когда A, тогда B».

(2) «Если A, то B».

Предложение (1) называют *категоричной формой* теоремы, а предложение (2) – *условной формой*.

В примере 4.1.1 теорема Виета сформулирована в категоричной форме, а в примере 4.1.2 даны условные формулировки этой теоремы.

Пример 4.1.3. Рассмотрим одну из первых простых теорем школьного курса геометрии: «Вертикальные углы равны». Здесь приведена наиболее лаконичная формулировка теоремы. Именно такая формулировка встречается в некоторых школьных учебниках по геометрии.

Сформулируем теорему разными способами. Вначале выделим условие и заключение теоремы.

В качестве объектов рассматриваются произвольные пары углов, обозначим их α, β.

Условие: «Углы α и β вертикальные» – $A(\alpha,\beta)$.

Заключение: «Углы α и β равны» – $B(\alpha,\beta)$.

Запишем логическую структуру теоремы:

$$\forall \alpha \forall \beta\, (A(\alpha,\beta) \rightarrow B(\alpha,\beta)).$$

Рассмотрим различные формулировки теоремы в категоричной форме:

– «Любые два вертикальных угла равны».

– «Любые два угла, являющиеся вертикальными, равны».

– «Пусть углы α и β вертикальные. Тогда они равны».

Условные формулировки теоремы:

– «Если углы вертикальные, то они равны».

– «Какие бы два угла мы ни взяли, если они вертикальные, то они равны». •

Наряду со схемой «Если, то» теорему можно формулировать на языке необходимых и достаточных условий, учитывая определения пункта 2.2.2.

Пример 4.1.4. Сформулируем теорему о вертикальных углах на языке необходимых и достаточных условий.

Так как равенство углов есть необходимое условие для того, чтобы углы были вертикальными, то теорему можно сформулировать так: «Для того чтобы углы были вертикальными, необходимо, чтобы они были равны».

Аналогичным образом получаем следующую формулировку теоремы: «Для того чтобы углы были равны, достаточно, чтобы они были вертикальными». •

Для упрощения формулировки в случае, когда теорема содержит много ограничений, которые накладываются на объекты, участвующие в теореме, описание этих ограничений отделяют от условия A. Можно считать, что те предложения, в которых описываются рассматриваемые объекты и даются определенные ограничения, относятся к разъяснительной части. Обозначим конъюнкцию указанных предложений буквой M. Тогда логическую структуру теоремы можно выразить формулой:

$$\forall z\ (M(z)\to(A(z)\to B(z))).$$

Кратко указанную формулу можно прочитать так: «Пусть M. Тогда если A, то B».

Не учитывая квантор общности и предметную переменную, имеем формулу $M\to(A\to B)$. Разграничение условий M и A позволяет формулировать теорему в более простом виде. Однако, при желании, предложения M и A можно объединить союзом «и» в одно предложение в силу равносильности формул $M\to(A\to B)$ и $(M\wedge A)\to B$.

Таким образом, условие теоремы может быть выбрано неоднозначно. Это имеет свои плюсы и минусы. Недостаток заключается в том, что при построении обратного утверждения к теореме можно получить неравносильные предложения. Более подробно поговорим об этом ниже.

С другой стороны, применив правило контрапозиции к импликации $A \to B$, где A является простым предложением, можно переформулировать исходную теорему в виде $M \to (\rceil B \to \rceil A)$. Применение данного правила к теореме $(M \wedge A) \to B$ позволяет получить теорему $\rceil B \to (\rceil M \vee \rceil A)$, формулировка которой часто не представляет практического интереса.

Пример 4.1.5. Рассмотрим истинное предложение: «Любое целое положительное число больше либо равно 1». Введем обозначения:

M = «x – целое число»,

A = «x – положительное число»,

B = «x больше либо равно 1».

Так как логическое строение предложения выражается формулой $\forall x\ ((M \wedge A) \to B)$, по правилу контрапозиции оно равносильно следующему: «Любое число, меньшее 1, является не положительным или не целым». Такая формулировка неудобна в использовании.

Учитывая, что $(M \wedge A) \to B \equiv M \to (A \to B)$, сформулируем исходное предложение в виде: «Пусть x – целое число. Если x положительное, то оно больше либо равно 1». По правилу контрапозиции имеем следующую равносильную формулировку: «Любое целое число, меньшее 1, не является положительным». •

Как видно из предыдущих примеров, квантор общности при формулировке часто опускают. Однако это можно делать только с внешним квантором общности. Дело в том, что кванторные слова могут входить и в условие, и в заключение теоремы. В этом случае отсутствие этих слов может вызывать неоднозначность в логическом понимании теоремы.

Пример 4.1.6. Рассмотрим теорему: «*Каковы бы ни были* прямая l и плоскость α, если прямая l перпендикулярна *любой* прямой, лежащей в этой плоскости, то l перпендикулярна плоскости α». Истинность этого предложения следует из определения перпендикулярности прямой и плоскости.

Эту теорему можно сформулировать, опустив внешний квантор общности: «Если прямая l перпендикулярна *любой* прямой, лежащей в плоскости α, то l перпендикулярна плоскости α».

Условие теоремы: A = «Прямая l перпендикулярна *любой* прямой, лежащей в плоскости α».

Заключение: B = «Прямая l перпендикулярна плоскости α».

Как видим, в условии теоремы говорится о любой прямой, лежащей в плоскости α.

При опускании слова «любой» в условии получится предложение: «Если прямая l перпендикулярна прямой, лежащей в плоскости α, то l перпендикулярна плоскости α». Это предложение напоминает такое: «Если прямая l перпендикулярна *некоторой* прямой, лежащей в плоскости α, то l перпендикулярна плоскости α». Однако последнее высказывание ложно. Приведите соответствующий контрпример.

Итак, квантор, содержащийся в условии A, нужно произносить. Тогда при использовании правила контрапозиции, строя отрицание к A, данный квантор сменится на квантор существования: «Если прямая l не перпендикулярна плоскости α, то прямая l не перпендикулярна хотя бы одной прямой, лежащей в плоскости α». •

4.2. Теоремы существования и единственности

Поговорим о теоремах, которые утверждают существование объектов, удовлетворяющих определенным свойствам. Заключение таких теорем содержит квантор существования.

Пример 4.2.1. Рассмотрим теорему о плотности множества рациональных чисел: «Между любыми двумя действительными числами лежит хотя бы одно рациональное число».

Выделим условие и заключение теоремы. Вначале сформулируем теорему в условной форме: «Если x и y – различные действительные числа, то существует рациональное число t, которое лежит между ними».

Введем два предиката: $A(x,y)$ = «x и y – различные действительные числа», $P(t,x,y)$ = «t – рациональное число, которое лежит между x и y».

Предложение A есть условие теоремы. Заключение правильно записать формулой $\exists t\, \mathrm{P}(t,x,y)$.

Тогда исходная теорема будет иметь вид: $\forall x \forall y\, (A(x,y) \to \exists t\, P(t,x,y))$. •

Теорема, заключение которой содержит квантор существования, называется *теоремой существования*.

Пример 4.2.2. Рассмотрим теорему: «В любой треугольник можно вписать окружность».

Пусть переменная x обозначает треугольник, переменная t – окружность.

Возьмем предикат $P(x,t)$ = «Окружность t вписана в треугольник x (то есть касается всех его сторон)».

В теореме говорится о существовании объекта t при условии, что уже выбран объект x. Логическая структура предложения может быть выражена формулой $\forall x \exists t\ P(x,t)$.

Менять местами кванторы нельзя. Предложение «Существует окружность, которая вписана в любой треугольник», неверно. •

Бывает, что квантор существования стоит на первом месте. В этом случае теорема утверждает существование конкретного объекта в рассматриваемом контексте.

Пример 4.2.3. «Существует функция, определенная на всей числовой прямой, которая разрывна в каждой точке».

Для доказательства этой теоремы нужно привести пример конкретной числовой функции. Определим такую функцию, называемую функцией Дирихле. Каждому рациональному числу поставим в соответствие 1, а любому иррациональному числу – 0. Строгое доказательство того, что эта функция разрывна в каждой точке, требует четкого определения непрерывности, которое дается в курсе математического анализа. •

Итак, в общем случае теорему существования можно записать формулой $\forall x\ (A(x) \to \exists t\ P(t,x))$. В частности, условие A может отсутствовать. Тогда теорема имеет вид $\forall x \exists t\ P(x,t)$ или $\exists t\ P(t)$.

Иногда формулировка теоремы существования не содержит напрямую слова «существует».

Пример 4.2.4. «Квадрат любого четного числа имеет вид $4n$, где n – целое число».

Переформулируем данное предложение, выделив квантор существования: «Для любого целого числа x если x четное, то существует целое число n, такое, что $x^2=4n$».

Запишем предложение символически:

$$\forall x \in \mathbf{Z}\ [(x - \text{четное}) \to (\exists n \in \mathbf{Z})\ (x^2=4n)]. \bullet$$

Теоремы, подобные примеру 4.2.4, в общем случае имеют такую формулировку: «Произвольный объект x из множества D можно представить в виде $x = f(a)$, где $a \in M$». Здесь буква f обозначает некоторый терм, D и M – множества. Символическая запись предложения такова:

$$(\forall x \in D)\ (\exists a \in M)\ [x = f(a)].$$

Пример 4.2.5. «Не существует рационального числа, квадрат которого равен 2».

Переформулируем теорему, используя законы логики:

$$\rceil(\exists x \in \mathbf{Q}\ [x^2=2]) \equiv \forall x \in \mathbf{Q}\ [x^2 \neq 2].$$

Тогда данная теорема может быть сформулирована так: «Квадрат любого рационального числа не равен 2». •

Часто встречаются теоремы, в которых утверждается существование ровно одного объекта, обладающего некоторым свойством. Такие теоремы называются *теоремами существования и единственности*.

Пример 4.2.6. «Пусть a – произвольное действительное число. При любом нечетном числе n уравнение $x^n = a$ имеет ровно один действительный корень».

Данное предложение является конъюнкцией двух теорем. Сформулируем их, полагая по умолчанию, что a – произвольное действительное число.

1) «При любом нечетном n уравнение $x^n = a$ имеет хотя бы один корень».

2) «При любом нечетном n уравнение $x^n = a$ не может иметь двух различных корней». •

Предложение «*Существует ровно один объект, обладающий свойством P*» кратко записывают формулой $\exists! x\ P(x)$ или $\exists_1 x\ P(x)$. Приведем другие варианты чтения этого предложения:

– «Существует единственный объект, обладающий свойством P».

– «Существует единственный x, такой, что $P(x)$».

– «Существует объект, обладающий свойством P, и притом только один».

Разберемся в логической структуре теоремы существования и единственности.

Предложение $\exists! x\ P(x)$ равносильно конъюнкции двух предложений:

A = «*Существует хотя бы один объект, обладающий свойством P*» и

B = «*Неверно, что существуют хотя бы два различных объекта, обладающих свойством P*».

Предложение A может быть записано формулой $\exists x\, P(x)$. Для того чтобы записать логическую структуру предложения B, воспользуемся законами логики:

$$B = \urcorner(\exists x \exists y\, [P(x) \wedge P(y) \wedge (x \neq y)]) \equiv \forall x \forall y \urcorner [(P(x) \wedge P(y)) \wedge (x \neq y)] \equiv$$
$$\equiv \forall x \forall y\, [(P(x) \wedge P(y)) \rightarrow (x = y)].$$

Полученную формулу можно прочитать так: «Какие бы два объекта мы ни взяли, если они оба удовлетворяют свойству P, то они совпадают». На основе правила контрапозиции предложение можно переформулировать следующим образом: «Никакие два различных объекта одновременно свойством P не обладают». Даже с интуитивной точки зрения должно быть понятно, что последнее предложение равносильно B.

В математике предложение B принято формулировать по следующей схеме:

«*Существует не более одного объекта, обладающего свойством P*», или

«*Если существует объект, обладающий свойством P, то только один*».

В первом предложении между словами «существует» и «не более одного» нет знака конъюнкции. Поэтому истинность такого предложения не означает существования объекта.

Пример 4.2.7. Предложение «Существует не более одного простого числа, делящегося на 6» является истинным. Действительно, простых чисел, делящихся на 6, нет ни одного, что следует из определения простого числа. •

Предложение «Существует не более одного объекта, обладающего свойством P» равносильно предложению «Ни один объект не обладает свойством P, или существует единственный объект, обладающий свойством P».

Далее приведем примеры теорем существования и единственности и пример теоремы, в которой говорится о существовании не более чем одного объекта.

Пример 4.2.8. Теорема «В любой треугольник можно вписать окружность, и притом только одну» равносильна конъюнкции двух следующих теорем.

«В любой треугольник можно вписать окружность» – теорема существования.

«Любые две окружности, вписанные в треугольник, совпадают» – теорема о единственности окружности. •

Пример 4.2.9. Рассмотрим пример теоремы, в которой говорится о единственности представления натурального числа в определенном виде.

«Любое натуральное число, большее 1, можно представить в виде произведения простых чисел, и притом единственным образом, с точностью до порядка следования множителей».

Запишем теорему в символическом виде:

$$(\forall x \in \mathbf{N}, x>1)\ (\exists! p_1, p_2, \ldots, p_n \text{ – простые})\ [x = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n].$$

Фраза «С точностью до порядка следования множителей» означает, что рассматривается неупорядоченный набор простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Например, наборы 2,2,2,3 и 3,2,2,2 совпадают, то есть $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ – одно представление. •

Пример 4.2.10. Рассмотрим теорему, в которой говорится о единственности окружности, вписанной в четырехугольник, но не утверждается ее существование:

«В четырехугольник можно вписать не более одной окружности».

Теорему можно сформулировать так: «Если в четырехугольник можно вписать окружность, то только одну».

Истинность данного предложения не означает существования вписанной в четырехугольник окружности. Например, в прямоугольник, не являющийся квадратом, нельзя вписать ни одной окружности. •

4.3. Обратная теорема

Пусть теорема имеет вид $\forall z\ (A(z) \rightarrow B(z))$.

Для этой теоремы можно сформулировать следующее предложение:

$$\forall z\ (B(z) \rightarrow A(z)),$$

которое называют *обратным* (по отношению к исходному предложению).

Так как формулы $A \rightarrow B$ и $B \rightarrow A$ не равносильны, то обратное предложение к теореме не обязано быть истинным высказыванием.

Пример 4.3.2. Рассмотрим теорему «Вертикальные углы равны». Сформулируем ее в условной форме: «Если углы вертикальные, то они равны».

Сформулируем обратное предложение: «Если углы равны, то они вертикальные», или «Любые два равных угла являются вертикальными». Это предложение неверно, так как существуют два угла, которые равны, но не являются вертикальными. Например, можно рассмотреть два угла при основании равнобедренного треугольника. •

Итак, предложение, обратное теореме, в общем случае не обязано являться истинным высказыванием, а значит, не обязано являться теоремой. В математическом лексиконе часто встречается словосочетание «обратная теорема неверна». Строго говоря, эта фраза некорректна, и правильнее было бы говорить: «Предложение, обратное теореме, неверно». Только после того, как доказано, что обратное предложение истинно, можно говорить о том, что мы имеем обратную теорему.

Однако ради лаконичности речи говорят фразу «Обратная теорема неверна», считая, что она означает следующее: «Предложение, обратное теореме, неверно». Также вместо слов «Сформулируем предложение, обратное теореме», говорят: «Сформулируем обратную теорему».

Пример 4.3.3. В школьном курсе геометрии наряду с теоремой Виета доказывается обратная теорема. Сформулируем ее.

«Если числа x_1 и x_2 удовлетворяют равенствам $x_1 \cdot x_2 = q$ и $x_1 + x_2 = -p$, то они являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$». •

Пример 4.3.4. Рассмотрим теорему Пифагора: «В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов».

Условная формулировка теоремы: «Если треугольник прямоугольный, то квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов».

Для того чтобы корректно построить предложение, обратное теореме Пифагора, сформулируем теорему, не употребляя при этом термины «гипотенуза» и «катет». Дело в том, что изначально нам дан произвольный треугольник. Формулируя заключение исходной теоремы, мы уже знаем, что треугольник прямоугольный. При построении обратного предложения заключение исходной теоремы становится условием и при его формулировке нельзя использовать словосочетание «квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов», так как ни о каком прямоугольном треугольнике пока речи не идет.

Теорему Пифагора можно сформулировать так: «Если треугольник прямоугольный, то квадрат одной из сторон равен сумме квадратов двух других сторон».

Тогда обратное утверждение имеет вид: «Если квадрат одной стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то треугольник прямоугольный». Именно такая формулировка встречается в ряде школьных учебников по геометрии. Отметим, конечно, что предложение, обратное теореме Пифагора, истинно. Поэтому абсолютно правомерно говорить об обратной теореме Пифагора.

Продолжим исследование теоремы Пифагора. Авторы некоторых пособий, как правило, уточняют, что исходная теорема Пифагора содержит более полную информацию, так как в ней говорится о конкретной стороне прямоугольного треугольника, квадрат которой равен сумме квадратов двух других сторон (эта сторона лежит против прямого угла и называется гипотенузой). В переработанной же формулировке в заключении утверждается, что существует сторона, обладающая указанным свойством.

Чтобы получить более полную версию обратной теоремы, переформулируем теорему Пифагора, используя обозначения вершин: «Если ABC – прямоугольный треугольник с гипотенузой BC, то $BC^2=AB^2+AC^2$». Обратным является предложение: «Если для треугольника ABC верно равенство $BC^2=AB^2+AC^2$, то этот треугольник прямоугольный с гипотенузой BC».

Не используя обозначения вершин треугольника, теорему Пифагора можно сформулировать по-другому. Для этого вместо предложения «Треугольник прямоугольный» можно взять равносильное ему предложение «В треугольнике один из углов прямой». Тогда получим следующую теорему: «Если в треугольнике *один* из углов прямой, то квадрат стороны, лежащей против *этого* угла, равен сумме квадратов двух других сторон». Обратным этому предложению является предложение: «Если квадрат *одной* из сторон треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то угол, лежащий против *этой* стороны, является прямым». •

Как видно из данного примера, не для всякой теоремы легко математически грамотно сформулировать обратное предложение. Вспомним также, что под условием теоремы можно понимать разные предложения, учитывая или нет ограничения, накладываемые на объекты (об этом шла речь в пункте 4.1). Из-за этого обратное предложение в общем случае строится неоднозначно. При этом такая неоднозначность позволяет получить неравносильные обратные предложения.

Пусть теорема имеет вид импликации $(A_1 \wedge A_2) \rightarrow B$ (внешний квантор общности и предметная переменная опущены). Обратное предложение имеет вид $B \rightarrow (A_1 \wedge A_2)$.

Перепишем теперь формулу $(A_1 \wedge A_2) \to B$ в виде $A_1 \to (A_2 \to B)$. Понимая под условием теоремы предложение A_2, обратным предложением является такое: $A_1 \to (B \to A_2)$.

Поменяем местами формулы A_1 и A_2 в конъюнкции $A_1 \wedge A_2$. Получим формулу $A_2 \wedge A_1 \to B$, которая равносильна $A_2 \to (A_1 \to B)$. Понимая теперь под условием теоремы предложение A_1, получим еще одно обратное предложение: $A_2 \to (B \to A_1)$.

Несмотря на то что формулы $(A_1 \wedge A_2) \to B$, $A_1 \to (A_2 \to B)$ и $A_2 \to (A_1 \to B)$ равносильны между собой, формулы $B \to (A_1 \wedge A_2)$, $A_1 \to (B \to A_2)$ и $A_2 \to (B \to A_1)$ уже не являются равносильными.

Пример 4.3.5. Рассмотрим предложение из примера 4.1.5: «Любое целое положительное число больше либо равно 1». Для него можно построить три обратных утверждения:

1) «Если число больше либо равно 1, то оно целое и положительное» – ложь.

2) «Если целое число больше либо равно 1, то оно положительное» – истина.

3) «Если положительное число больше либо равно 1, то оно целое» – ложь. •

По правилу контрапозиции предложение, обратное теореме $\forall z\, (A(z) \to B(z))$, равносильно предложению $\forall z\, (\rceil A(z) \to \rceil B(z))$. Такое предложение называется *противоположным* по отношению к исходному.

Итак, по отношению к фиксированной теореме всегда можно формально построить несколько предложений, некоторые из них будут равносильны исходной, но не все. Соберем сказанное выше воедино.

Пусть теорема имеет вид импликации $A \to B$. Назовем данную теорему *прямой*. По отношению к прямой теореме можно сформулировать еще три предложения:

$B \to A$ – *обратное*,

$\rceil A \to \rceil B$ – *противоположное*,

$\rceil B \to \rceil A$ – *обратное к противоположному* (или *противоположное к обратному*).

Предложение $\rceil B \to \rceil A$ по отношению к прямой импликации также называют *контрапозитивным предложением*.

Среди четырех предложений имеются пары равносильных в силу закона контрапозиции: $A \to B \equiv \rceil B \to \rceil A$ и $B \to A \equiv \rceil A \to \rceil B$.

Пример 4.3.6. Построим к теореме «В ромб можно вписать окружность» обратное, противоположное и контрапозитивное предложения.

Вначале сформулируем теорему в условной форме: «Если четырехугольник является ромбом, то в него можно вписать окружность».

Обратное предложение: «Если в четырехугольник можно вписать окружность, то он является ромбом». Обратное предложение неверно, так как для окружности можно сконструировать трапецию, которая будет касаться всех ее сторон. Трапеция же по общепринятому определению ромбом являться не может, так как имеет пару противоположных непараллельных сторон. Опишите способ построения такой трапеции, то есть докажите ее существование.

Противоположное предложение: «Если четырехугольник не является ромбом, то в него нельзя вписать окружность». Это предложение ложно, так как ложным является обратное предложение.

Предложение, обратное к противоположному: «Если в четырехугольник нельзя вписать окружность, то он не является ромбом». Это предложение истинно, так как оно равносильно прямой теореме. •

Пусть условие теоремы фиксировано и наряду с прямой теоремой верна обратная к ней. Тогда формулировки двух теорем объединяют в одну. Действительно, конъюнкция формул $\forall z\,(A(z) \to B(z))$ и $\forall z\,(B(z) \to A(z))$ равносильна формуле $\forall z\,[(A(z) \to B(z)) \wedge (B(z) \to A(z))]$, которая, в свою очередь, равносильна формуле $\forall z\,(A(z) \leftrightarrow B(z))$. Полученную теорему формулируют по схеме: «A тогда и только тогда, когда B». Часто используют язык необходимых и достаточных условий: «Для того чтобы A, необходимо и достаточно, чтобы B». Такой оборот речи оправдан, так как предложение B является необходимым условием для A (в силу истинности прямой теоремы) и достаточным условием для A (в силу истинности обратной теоремы). Саму теорему вида $\forall z\,(A(z) \leftrightarrow B(z))$ называют *критерием*.

Пример 4.3.7. Имеем следующие критерии.

«Действительные числа x_1 и x_2 являются корнями уравнения $x^2+px+q=0$ тогда и только тогда, когда $x_1 \cdot x_2 = q$ и $x_1+x_2 = -p$».

«Для того чтобы треугольник ABC был прямоугольным с гипотенузой BC, необходимо и достаточно, чтобы $BC^2=AB^2+AC^2$». •

Пример 4.3.8. Из школьного курса геометрии известны две теоремы.

Свойство параллелограмма: «Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам».

Признак параллелограмма: «Если в четырехугольнике диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник – параллелограмм».

Вторая теорема является обратной к первой. Для понимания этого можно рассмотреть предложение A = «Четырехугольник x является параллелограммом» и предложение B = «Диагонали четырехугольника x пересекаются и точкой пересечения делятся пополам». Сформулируйте самостоятельно свойство параллелограмма в условной форме.

Таким образом, можно сформулировать критерий параллелограмма: «Для того чтобы четырехугольник являлся параллелограммом, необходимо и достаточно, чтобы его диагонали пересекались и точкой пересечения делились пополам».

Сформулируйте самостоятельно критерий с помощью слов «тогда и только тогда». •

4.4. Понятие аксиомы

Наряду с понятием теоремы в математике используется понятие аксиомы. *Аксиома* – это тоже истинное предложение, однако оно считается истинным по определению.

История понятия аксиомы берет начало с Древней Греции. Изначально аксиома понималась как очевидно истинное утверждение. Однако по мере развития математики вопрос об очевидности стал некорректен. Дело в том, что в аксиоме говорится о каких-то объектах, связанных какими-то отношениями. Записав аксиому на языке формул, мы получаем абстрактное предложение, которое может превратиться как в истинное, так и в ложное высказывание в зависимости от того, что мы будем понимать под объектами и отношениями, обозначаемыми в аксиоме определенными символами.

Пример 4.4.1. Рассмотрим одну из аксиом школьного курса геометрии: «Через любые две различные точки проходит прямая, и притом только одна». Это предложение выбрано в качестве аксиомы в силу интуитивного понимания того, что такое точка и прямая.

Запишем сформулированное предложение символически. Пусть переменные x и y обозначают точки, переменная l – прямую. Предложение «x

и y – различные точки» обозначим $A(x,y)$, а предложение «Прямая l проходит через точки x и y» – $B(x,y,l)$.

Тогда аксиома будет иметь следующий вид:

$$\forall x \forall y \big(A(x,y) \to \exists! l\, B(x,y,l)\big).$$

Отвлечемся теперь от того, что мы понимаем под прямой. Допустим, что термин «прямая» означает для нас окружность. Переформулируем предложение, считая, что переменная l обозначает окружность, а все остальные символы интерпретируем в обычном смысле: «Через любые две различные точки проходит окружность, и притом только одна». Нетрудно видеть, что это предложение ложно, так как через две точки можно провести бесконечно много окружностей.

Видим, что для одной интерпретации математической теории аксиома как формула может являться истинным высказыванием, а для другой – ложным высказыванием. •

Итак, аксиома математической теории – это предложение, принимаемое в данной теории как истинное. Вопрос о доказательстве аксиомы не ставится.

Выбор системы аксиом происходит так, чтобы в них были отражены основные свойства той области знаний, которую требуется описать на математическом языке. Аксиому можно проинтерпретировать, проиллюстрировать на примере, показать необходимость ее выбора, но не доказать.

Аксиомы представляют собой базовые утверждения, своего рода фундамент того или иного раздела математики. Необходимость такого фундамента понять несложно. Для того чтобы доказывать теоремы, нужно последовательно опираться на верные предложения, но эта цепочка не может быть бесконечной. Аксиомы служат отправной точкой в цепочке доказательств.

Осмысление рассмотренного в этом пункте материала не сиюминутный процесс, он требует времени. Вообще, понимание многих идей, лежащих в основе математики, происходит параллельно с изучением различных математических дисциплин. Поэтому на данном этапе мы не будем более подробно останавливаться на сущности аксиоматического метода в математике. Отметим лишь, что список аксиом, на основе которых можно построить школьный курс планиметрии, приведен, например, в учебнике [1] в качестве приложения.

§ 5. Методы математических доказательств

5.1. Понятие доказательства. Правила вывода

Доказать предложение означает установить его истинность.

Процесс *доказательства* осуществляется по следующей схеме: строят последовательность предложений A, A_1, A_2, …, A_n, B, при этом для каждого предложения, начиная со второго, либо обосновывается его истинность, либо говорится о том, что оно следует из предыдущих предложений. Приведенная цепочка утверждений позволяет заключить, что из A следует B. Напомним, что предложение Q называется следствием предложения P, если всегда, когда верно P, верно и Q.

Доказательство, в общем случае, носит условный характер. Изначально выбирается некоторое предположение A (например, условие теоремы), и исходя из истинности этого предложения обосновывается истинность предложения B. Если же известно, что A является истинным высказыванием (например, A – это ранее доказанная теорема или аксиома), то данная цепочка предложений доказывает, что и предложение B является истинным высказыванием.

Пример 5.1.1. Проведем доказательство предложения «Сумма квадратов двух четных чисел делится на 4».

Введем обозначения.

A = «Числа x и y четные»,

A_1 = «x и y имеют вид $x=2n$, $y=2k$, где n, k – целые числа»,

A_2 = «$x^2+y^2=4m$, где m – целое число»,

B = «Сумма x^2+y^2 делится на 4».

Запишем процесс доказательства: «По определению четного числа из A следует A_1. По законам операций сложения и умножения из A_1 следует A_2. Действительно, пусть x и y имеют вид $x=2n$, $y=2k$, где n, k – целые числа. Тогда сумма их квадратов равна $x^2+y^2 = (2n)^2+(2k)^2 = 4n^2+4k^2 = 4(n^2+k^2) = 4m$, где $m=n^2+k^2$– целое число. По определению делимости целых чисел из A_2 следует B».

Схематично процесс доказательства можно записать в виде:

$$A \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow B.$$

На основании приведенных рассуждений можно утверждать, что из A следует B, то есть для любых четных чисел x и y сумма их квадратов делится на 4. Исходное предложение доказано. •

В рассмотренном примере для обоснования того, что из A_1 следует A_2, мы воспользовались общими свойствами операций: $(ab)^2 = a^2b^2$, $4a+4b = 4(a+b)$, при этом совершенно неважно, какие числовые значения принимают буквы a и b.

Аналогичным образом можно выделить общие свойства на множестве формул логики, которые позволяют при любых исходных предложениях получать определенные следствия. Например, для любого предиката $A(x)$, где x обозначает произвольное действительное число, из любого предложения вида $\forall x A(x)$ следует предложение $\exists x A(x)$. Действительно, если предложение истинно для каждого числа x, то, взяв вместо x, например, число 1, истинным будет предложение $A(1)$. Поэтому наверняка существует число, удовлетворяющее свойству A. При этом совсем неважно, какой именно предикат обозначает буква A.

Правила, позволяющие получать следствия независимо от содержания предложений, называют *правилами вывода*. Отметим, что правила вывода – наряду с тавтологиями и равносильностями – можно отнести к законам логики.

Каждое правило вывода представляет собой последовательность формул (F_1, F_2, …, F_n, P), где формулы F_i называются *посылками* (или гипотезами), а формула P называется *заключением* (или следствием).

Указанное правило кратко обозначают следующим образом:

$$\frac{F_1, F_2, \ldots, F_n}{P}.$$

С логической точки зрения каждое такое правило вывода означает, что всегда, когда каждая из формул F_1, F_2, …, F_n обозначает истинное высказывание, формула P также будет истинным высказыванием. Другими словами, формула $(F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n) \to P$ является истинной при всех значениях переменных, от которых она зависит. Напомним, что такие формулы в логике называются тавтологиями (используются и другие термины: «общезначимая формула», «логический закон»). Каждое правило вывода можно записать, используя знак отношения следования: $(F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n) \Rightarrow P$.

Рассмотрим *правило отделения* (modus ponens) $\dfrac{A,\, A \to B}{B}$ (1).

Здесь A и B могут обозначать произвольные предложения, возможно, зависящие от предметных переменных. Более того, под A и B можно понимать произвольные формулы.

Правило (1) является одним из основных правил, применяемых в доказательствах. Обычно это делается неосознанно или по умолчанию. Опишем суть этого правила. Предположим, что в процессе доказательства выведено предложение A и обосновано, что из A следует B, то есть доказана импликация $A \to B$. Тогда можно сделать вывод о том, что отсюда следует предложение B.

Пример 5.1.2. Пусть в процессе доказательства получено, что целое число x делится на 4 (заметим, что здесь нет кванторного слова и мы имеем предикат, который является следствием каких-то предложений, например следствием условий теоремы).

Обозначим: A = «x делится на 4», B = «x – четное».

Так как любое число, делящееся на 4, является четным, то истинна импликация $A \to B$. На основании правила (1) можно сделать вывод: число x четное. •

Последовательность предложений, построенных по правилу вывода, называется *правильным рассуждением*.

По данным примера 5.1.2 построим правильное рассуждение: «Пусть число делится на 4. Если число делится на 4, то оно является четным. Следовательно, данное число является четным».

Остановимся на случае, когда предложения зависят от переменной x (как в предыдущем примере). Предположим, что предложение A является истинным при всех допустимых значениях x (такое предложение называется *тождественно истинным*) и из предложения A следует B, то есть формула $A \to B$ тождественно истинна. Тогда можно сделать вывод о том, что и предложение B является тождественно истинным.

Имеем правило: $\dfrac{\forall x\, A,\ \forall x\,(A \to B)}{\forall x\, B}$ (2).

Пример 5.1.3. Пусть известно (ранее доказано), что квадрат любого действительного числа неотрицателен и любое число, противоположное неотрицательному числу, является неположительным.

Рассмотрим два предиката: $A = (x^2 \geq 0)$, $B = (-x^2 \leq 0)$.

Используя указанные факты, имеем: A – тождественно истинный предикат, и из A следует B. Значит, по правилу (2) предикат B является тождественно истинным. Итак, доказано, что неравенство $-x^2 \leq 0$ верно при всех действительных значениях x. •

С помощью таблицы истинности нетрудно доказать, что формула $[(A\to B)\wedge(B\to C)]\to(A\to C)$ является тавтологией. Отсюда можно получить следующее правило:

$$\frac{A\to B, B\to C}{A\to C} \quad (3)$$

В логике схему (3) называют *правилом силлогизма* (*цепного вывода*).

Подчеркнем, что правила вывода нужно применять следующим образом. Пусть в процессе доказательства получены предложения, расположенные над чертой. Тогда можно вывести предложение, записанное под чертой.

Пример 5.1.4. Обозначим A = «x – целое число», B = «x – натуральное число», C = «$2x$ – натуральное число».

Если в доказательстве буква x обозначает произвольное число, то посылка $A\to B$ при некоторых x является ложным высказыванием (например, при $x=-2$). Поэтому импликация $A\to C$ не обязана быть истинным высказыванием для произвольного числа x. В этом случае применять правило (3) нельзя. Тем не менее если мы возьмем такое число, при котором обе посылки верны, то заключение *для этого же числа* будет истинным высказыванием.

Предположим, что исходя из условий теоремы доказано: x есть положительное число. Тогда импликация $A\to B$ принимает истинное значение для такого значения x (так как любое положительное целое число является натуральным). Заметим, что импликация $B\to C$ всегда истинна. Поэтому теперь можно воспользоваться правилом (3). •

Рассмотрим другой пример.

Пример 5.1.5. Обозначим A = «x – натуральное число», B = «x – целое число», C = «x – рациональное число».

Так как любое натуральное число является целым, а любое целое является рациональным (целое число a можно представить в виде дроби с числителем a и знаменателем 1), то обе импликации $A\to B$ и $B\to C$ – это истинные высказывания при всех x. Отсюда можно заключить, что импликация $A\to C$ всегда принимает истинное значение. •

Итак, если предикаты A, B и C зависят от переменной x, то имеет место следующее правило:

$$\frac{\forall x\,(A(x) \to B(x)), \quad \forall x\,(B(x) \to C(x))}{\forall x\,(A(x) \to C(x))} \quad (4).$$

Пример 5.1.6. На основе правила (4) построим рассуждение: «Все квадраты являются ромбами. В любом ромбе диагонали перпендикулярны. Следовательно, в каждом квадрате диагонали перпендикулярны».

Если уже доказана истинность двух исходных предложений, то приведенное рассуждение доказывает истинность заключения. •

Рассмотрим еще одно правило вывода. Для этого выведем следствие из предложений $\forall x\,(A(x) \to B(x))$ и $\neg B(y)$, где A и B – это произвольные предикаты, зависящие от одной переменной.

Пусть предложения $\forall x\,(A(x) \to B(x))$ и $\neg B(y)$ одновременно истинны. Тогда импликация $A(x) \to B(x)$ истинна при всех x, а $B(y)$ – ложно. Подставим вместо переменной x значение y, тогда $A(y) \to B(y)$ будет истинным высказыванием. По определению импликации, так как она принимает истинное значение, а предложение $B(y)$ ложно, то предложение $A(y)$ является ложным. Поэтому $\neg A(y)$ истинно. Итак, имеем правило:

$$\frac{\forall x\,(A(x) \to B(x)), \quad \neg B(y)}{\neg A(y)} \quad (5).$$

Здесь буквы A и B обозначают произвольные предложения, а буква y – произвольное значение, допустимое для предложений A и B.

Пример 5.1.7. Предположим, что нам известны два факта: любое натуральное число является целым, а число π («пи») не является целым. Докажем, не используя больше никаких математических знаний из школьного курса (опираясь только на логику), следующую теорему: «Число π не является натуральным».

Введем обозначения: $A(x)$ = «Число x натуральное», $B(x)$ = «Число x целое». Переменная x обозначает число.

Тогда формула $\neg B(\pi)$ обозначает предложение «Число π не целое», формула $\forall x\,(A(x) \to B(x))$ – предложение «Любое натуральное число является целым», а формула $\neg A(\pi)$ – предложение «Число π не натуральное».

Известные нам факты – это посылки правила (5). Применяя это правило, делаем заключение: «Число π не является натуральным». Теорема доказана. •

Замечание. Рассмотренные выше правила вывода можно сформулировать на языке отношения следования:

$$\frac{A,\ A \Rightarrow B}{B}, \quad \frac{A \Rightarrow B,\ \neg B}{\neg A}, \quad \frac{A \Rightarrow B, \quad B \Rightarrow C}{A \Rightarrow C}.$$

Например, последнее правило интерпретируется следующим образом: если доказано, что из предложения A следует предложение B, а из B следует C, то можно заключить, что из A следует C. Это правило дает возможность доказывать теоремы методом последовательного выведения следствий: $A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow A_n$.

Рассмотрим доказательство одного утверждения и попытаемся выделить используемые правила вывода.

Пример 5.1.8. Докажем предложение «Квадрат ненулевого действительного числа положителен».

Доказательство. Пусть x – действительное число. Покажем, что если x не равно 0, то x^2 больше 0.

Известно, что любое действительное число является либо положительным, либо отрицательным, либо равно 0. Поэтому если x не равно 0, то оно положительное или отрицательное.

Если x положительное, то его квадрат положителен (по правилу умножения чисел). Если x отрицательное, то его квадрат также положителен (снова по правилу умножения чисел).

Следовательно, если x не равно 0, квадрат x положителен. Утверждение доказано.

Проведем анализ такого доказательства. Введем обозначения.

$A = (x \neq 0)$, $B = (x > 0)$, $C = (x < 0)$, $D = (x^2 > 0)$.

Запишем цепочку предложений, составляющих доказательство, указывая в скобках соответствующую формулу.

1. Известно, что число x либо равно 0, либо является положительным, либо отрицательным ($\rceil A(x) \vee B(x) \vee C(x)$ или, сокращенно, $\rceil A \vee B \vee C$).

2. Поэтому если x не равно 0, то оно положительное или отрицательное ($A \rightarrow (B \vee C)$).

3. Если x положительное, то его квадрат положителен ($B \rightarrow D$).

4. Если x отрицательное, то его квадрат также положителен ($C \rightarrow D$).

5. Следовательно, если x не равно 0, квадрат x положителен ($A \rightarrow D$).

Первое предложение верно для любого числа x. Однако в дальнейших рассуждениях кванторные слова не используются. Здесь работает так называемое *правило удаления квантора общности*: так как предложение верно для всех объектов, то этот объект можно обозначить какой-то буквой и вести дальнейшие рассуждения об этом объекте, используя взятую букву. Строго говоря, вначале мы имеем формулу $\forall x\,[\neg A(x) \vee B(x) \vee C(x)]$, из которой удаляем квантор общности.

Второе предложение получено по такому правилу: $\dfrac{\neg A \vee B \vee C}{A \rightarrow (B \vee C)}$. Это правило не зависит от конкретного содержания предложений A, B и C. Для его логического обоснования можно построить таблицу истинности.

Третья и четвертая импликации верны для всех объектов x. Удаляя квантор общности, получаем указанные предложения.

На каком основании получено пятое предложение? При получении этого предложения были одновременно применены два правила. Выделим их.

Из третьего и четвертого предложений следует такое: «Если число x положительное или отрицательное, то x^2 положительное число».

Вывод получен на основании правила $\dfrac{B \rightarrow D,\ C \rightarrow D}{(B \vee C) \rightarrow D}$, которое опять же можно применять независимо от содержания предложений B, C и D. Проверьте справедливость этого правила с помощью таблицы истинности.

Теперь мы имеем предложение вида $(B \vee C) \rightarrow D$. Учитывая второе предложение и применяя правило цепного вывода (3), получаем пятое предложение. Действительно, из формул $A \rightarrow (B \vee C)$ и $(B \vee C) \rightarrow D$ следует формула $A \rightarrow D$.

Так как все рассуждения были проведены для произвольно взятого числа x, то импликация $A \rightarrow D$ верна для всех x. Здесь мы вернули квантор общности, удаленный в процессе доказательства. В этом случае говорят, что применили *правило обобщения* (или правило введения квантора общности).

Итак, доказано, что квадрат любого ненулевого действительного числа положителен. •

Отметим, что возможность формулировать теорему, удаляя (или восстанавливая) внешний квантор общности, о чем шла речь в пункте 4.1, согласуется с правилом удаления квантора общности и правилом обобщения.

Остановимся на какое-то время на правиле обобщения. Несмотря на простоту этого принципа, он имеет большое значение, так как дает возможность проводить рассуждения, оперируя с фиксированной буквой (которая обозначает произвольное значение), а затем делать вывод о том, что полученное предложение верно при всех значениях, которые обозначает выбранная буква. С другой стороны, применять правило обобщения нужно аккуратно. Например, если в процессе доказательства буква обозначает какой-то конкретный объект, то применять правило обобщения по этой букве нельзя.

Пусть требуется доказать утверждение $\forall x P(x)$ = «Для всех x верно $P(x)$». Для этого выбирают произвольную букву a и доказывают, что $P(a)$ истинно. В этом случае доказательство обычно начинают словами: «Возьмем (рассмотрим, зафиксируем) произвольный элемент a». Также говорят: «Пусть a – произвольный элемент». В зависимости от контекста на выбранный произвольно элемент a, конечно, накладываются определенные ограничения; например, a может обозначать произвольное целое число. Вместо буквы a можно взять другую букву. Часто оставляют букву x. Однако в дальнейших рассуждениях буква x фигурирует уже как конкретный объект (он выбран произвольно и после этого зафиксирован).

После того как обоснована истинность $P(a)$, делают вывод, что доказано исходное предложение $\forall x P(x)$.

Если предложение $P(x)$ имеет вид импликации $A(x) \to B(x)$, то доказательство начинают фразой: «Пусть x – произвольный элемент, такой, что $A(x)$». Далее из $A(x)$ выводят следствия и получают $B(x)$. После этого по правилу обобщения заключают, что импликация $A(x) \to B(x)$ истинна при всех допустимых значениях x.

Пример 5.1.9. Докажем, что любое целое число, делящееся на 4, является четным. Истинностью этого утверждения мы пользовались в примере 5.1.2.

Доказательство. Пусть целое число x делится на 4. Тогда x имеет вид $x=4n$, где n – целое число (заметим, что здесь n обозначает не любое целое число, а вполне конкретное число, зависящее от значения x). Значит, x имеет вид $x = 2(2n) = 2m$, m – целое. Поэтому x – четное число.

Итак, при любом значении x, если x делится на 4, то x есть четное число. •

Приведем пример схемы, с помощью которой из истинных предложений можно получить ложное высказывание. Естественно, такую схему нельзя использовать при доказательстве.

Исходные высказывания: $F_1 = \exists x\ (A(x) \wedge B(x))$, $F_2 = \exists x\ (B(x) \wedge C(x))$.

Получаемая формула: $P = \exists x\ (A(x) \wedge C(x))$.

Не всегда, когда истинны предложения F_1 и F_2, обязано быть истинным предложение P.

Пример 5.1.10. F_1 = «Существует положительное число, являющееся целым».

F_2 = «Существует целое число, являющееся отрицательным».

P = «Существует число, являющееся положительным и отрицательным».

Высказывания F_1 и F_2 истинны, а высказывание P ложно. •

Замечание. Современная математическая логика позволяет получать правила вывода формально-аксиоматическим путем, то есть без использования содержательных рассуждений и опоры на истину и ложь, что позволяет дать понятию доказательства строгое определение. В нашем изложении материала правила вывода нельзя считать фундаментом понятия доказательства: так, для того чтобы получить даже самые простые правила, нам приходится их доказывать, что напоминает порочный круг.

В контексте данного пособия правило обобщения, например, воспринимается как понятный факт. Раз обосновано, что верно $P(a)$, где a обозначает произвольный, пусть и фиксированный объект, то обосновано утверждение $\forall x P(x)$. При формальном подходе это правило может быть просто взято за основу без каких-либо комментариев и доказательств.

5.2. Доказательство теорем существования и единственности

Пусть требуется доказать предложение $\exists x\ P(x)$ = «Существует объект, обладающий свойством P». Первый способ доказательства заключается в следующем: указывается конкретный объект a и обосновывается, что $P(a)$ истинно.

Пример 5.2.1. Для доказательства предложения «Существует функция, определенная на всей числовой прямой и разрывная в каждой точке» можно взять функцию Дирихле и доказать, что она разрывна в каждой точке.

Для доказательства предложения «Существует четное простое число» можно привести пример такого числа: $x=2$. •

Однако иногда справедливость предложения $\exists x\ P(x)$ доказывают так называемым косвенным способом, то есть доказывается, что такой объект существует, однако в явном виде этот объект не указывается.

Пример 5.2.2. Докажем утверждение: «Существует натуральное число, записанное одними единицами и делящееся на 23».

Это утверждение, конечно, можно доказать, если привести конкретный пример такого числа (попробуйте это сделать). Однако нетрудно видеть, что небольшие по записи числа 1, 11, 111, 1111, 11111 на 23 не делятся. Докажем существование требуемого числа по-другому.

Рассмотрим последовательность чисел, записанных одними единицами: $1;\ 11;\ 111;\ \ldots;\ \underbrace{11\ldots1}_{23};\ \underbrace{11\ldots1}_{24}$.

По теореме о делении с остатком остаток от деления числа на 23 может принимать одно из следующих значений: 0, 1, 2, 3, 4, …, 22 (то есть 23 различных числа).

В нашей последовательности имеются 24 различных числа. Значит, какие-то два из них имеют одинаковый остаток при делении на 23. Обозначим эти числа через a и b, при этом число a записывается n единицами, а число b ровно k единицами, и n больше k.

Разделим найденные числа $a = \underbrace{11\ldots1}_{n}$ и $b = \underbrace{11\ldots1}_{k}$ на 23 с остатком, то есть представим их в виде $a = 23q_1 + r$, $b = 23q_2 + r$. Вычтем из a число b, получим $a - b = 23(q_1 - q_2)$ – число, кратное 23. Число $a - b$ имеет вид $\underbrace{11\ldots1}_{n-k}\underbrace{0\ldots0}_{k}$.

Итак, некоторое число вида 11…10…0 делится на 23. Так как 23 не имеет делителей 2 и 5 (более того, 23 простое число), то из делимости числа 11…10…0 на 23 следует, что число 11…1 также делится на 23.

Таким образом, доказано, что существует число, записанное одними единицами и делящееся на 23. Однако из приведенного доказательства непонятно, сколько единиц должно быть, то есть существующее число явно не указано. Тем не менее из рассуждений можно сделать следующий вывод: для того чтобы найти указанное число, можно организовать перебор чисел 1, 11, 111, и т. д., при этом потребуется перебрать не более чем 23 числа, так как значение $n - k$ заключено в пределах от 1 до 23. •

Для доказательства предложения $\forall y \exists x\, A(x,y)$ нужно показать существование объекта x при произвольно выбранном объекте y. В этом случае вначале произвольно выбирают объект y и фиксируют его. Затем для этого объекта доказывают существование объекта x. Можно описать, например, способ конструирования x или доказать существование косвенным путем.

Пример 5.2.3. Рассмотрим теорему: «В любой треугольник можно вписать окружность».

Доказательство обычно начинают словами: «Возьмем произвольный треугольник». Далее для этого треугольника конструируется окружность, касающаяся всех его сторон. Для задания окружности надо указать ее центр и радиус. Центром нужной окружности является точка O пересечения биссектрис, а радиусом – расстояние от точки O до сторон треугольника.

Заметим, что приведенные рассуждения никак не обосновывают единственность вписанной окружности. •

Теперь перейдем к схеме доказательства единственности.

Утверждение о том, что свойством P обладает не более чем один объект, выражается формулой: $\forall x \forall y\ [(P(x) \wedge P(y)) \rightarrow (x=y)]$. Чтобы обосновать истинность этого предложения, поступают следующим образом. Выбирают произвольные значения переменных x и y. Эти значения обозначают двумя буквами, например a и b (однако часто оставляют буквы x и y). Из предложений $P(a)$ и $P(b)$ выводят следствия и получают, что $a=b$.

Пусть требуется доказать теорему $\exists! x\ P(x)$ = «Существует единственный объект, обладающий свойством P». Доказательство этой теоремы может быть разбито на два этапа: доказательство существования и доказательство единственности.

Пример 5.2.4. Рассмотрим теорему: «В любой треугольник можно вписать окружность, и притом только одну».

Идея доказательства существования была рассмотрена в примере 5.2.3.

Рассмотрим доказательство единственности. Пусть имеются две окружности, вписанные в треугольник ABC, обозначим их ω_1 и ω_2. Тогда центр каждой из окружностей ω_1 и ω_2 равноудален от сторон треугольника, а значит, лежит на биссектрисах треугольника, то есть совпадает с точкой O пересечения биссектрис. Радиус каждой из окружностей равен расстоянию от точки O до сторон треугольника. Следовательно, окружности ω_1 и ω_2 совпадают. •

5.3. Метод равносильных преобразований

Как было отмечено в пункте 5.1, в общем случае доказательство представляет собой цепочку предложений, каждое из которых, кроме начальных, является следствием предыдущих.

Пусть обосновано, что из предложения A следует предложение A_1, из A_1 следует A_2 и т. д., из A_n следует B. Схематично такое доказательство можно записать в виде

$$A \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \ldots \Rightarrow A_n \Rightarrow B.$$

Отсюда можно сделать вывод о том, что из A следует B. Значит, для того чтобы доказать истинность некоторого предложения, достаточно взять истинное высказывание и вывести из него требуемое предложение.

Однако часто можно увидеть другую схему рассуждений. Для доказательства предложения B выводят из него следствия и получают истинное предложение, откуда делают вывод о том, что и предложение B будет верным.

Пример 5.3.1. Докажем, что для любых неотрицательных чисел x и y верно неравенство $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$.

Доказательство. «Возьмем неравенство $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ и выполним ряд преобразований:

$$x + y \geq 2\sqrt{xy},\ \left(\sqrt{x}\right)^2 + \left(\sqrt{y}\right)^2 - 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} \geq 0,\ \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 \geq 0.$$

Так как полученное неравенство верно при всех неотрицательных значениях x и y, то и исходное неравенство верно при любых x и y».

Проанализируем приведенное доказательство. Мы взяли предикат B, заданный неравенством $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$, где $x,y \geq 0$. Далее с неравенством произвели последовательные действия: умножили на 2, преобразовали, используя формулы $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$, $\left(\sqrt{y}\right)^2 = y$, $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{xy}$, справедливые для всех неотрицательных чисел x и y, затем применили формулу квадрата разности. Получили тождественно истинное неравенство $\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 \geq 0$. Отсюда сделали вывод о том, что исходное неравенство является тождественно истинным. •

В рассмотренном примере прослеживается такая схема доказательства: строим цепочку предложений $B \Rightarrow B_1 \Rightarrow B_2 \Rightarrow A$, где A – тождественно истинный предикат; отсюда следует, что B – тождественно истинный предикат.

Оказывается, эта схема не всегда дает истинное заключение. Поэтому данное рассуждение построено логически неправильно, несмотря на то что в этом примере получено верное заключение.

Пример 5.3.2. Рассмотрим высказывание: «Любая пара действительных чисел x и y удовлетворяет системе $\begin{cases} x^2 + xy \geq 0 \\ y^2 + xy \geq 0 \end{cases}$».

«Докажем», что это высказывание истинно (слово «докажем» взято в кавычки, так как доказательство неправильное и на самом деле сформулированное предложение ложно).

«Возьмем исходную систему. Сложим почленно неравенства, получим неравенство $x^2+2xy+y^2 \geq 0$. Применим формулу квадрата суммы, получим $(x+y)^2 \geq 0$ – тождественно истинное неравенство. Раз полученное неравенство верно при любых x и y, то исходная система также верна при всех значениях x и y».

Опровергнем полученное утверждение. Возьмем $x=1$, $y=-2$. Тогда первое неравенство системы будет ложным высказыванием: $1-2 \geq 0$. •

Итак, в общем случае рассуждения, основанные на цепочке следствий $B \Rightarrow B_1 \Rightarrow B_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow B_n \Rightarrow A$, где A – истинное высказывание, не гарантируют истинность предложения B.

Подобного рода рассуждения будут приводить всегда к правильному выводу только при дополнительном ограничении: получаемые предложения цепочки B, B_1, …, B_n, A должны быть равносильны.

В примере 5.3.2 был получен неверный вывод, так как предикаты

$$(a \geq c) \wedge (b \geq d) \text{ и } (a + b \geq c + d)$$

не равносильны.

Следствие $(a \geq c) \wedge (b \geq d) \Rightarrow (a + b \geq c + d)$ верно по известному из школы свойству числовых неравенств, а вот обратное утверждение неверно.

В примере 5.3.1 все выполненные преобразования равносильны. Запишем грамотно цепочку равносильных преобразований:

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \Leftrightarrow x + y \geq 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2 + \left(\sqrt{y}\right)^2 - 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} \geq 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 \geq 0.$$

Заметим, что цепочка $B \Leftrightarrow B_1 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow B_n \Leftrightarrow A$, которая ведет от предложения B к истинному высказыванию A, может быть преобразована в цепочку утверждений, записанных в обратном порядке. Говорят, что все преобразования обратимы. Метод доказательства, основанный на этой схеме, называют *методом равносильных преобразований*.

5.4. Рассуждения от противного

В самом общем виде *метод от противного* можно описать следующей схемой. Пусть требуется доказать утверждение P. Для этого предполагают, что P неверно, то есть верно его отрицание $\neg P$. Из этого предположения выводят следствия, в результате чего получают два противоположных предложения C и $\neg C$ (говорят: «Пришли к противоречию»). На основании этого заключают, что предложение P доказано.

Приведенная схема может быть записана на языке формул:

$$[(\neg P \to C) \wedge (\neg P \to \neg C)] \to P.$$

Нетрудно проверить (например, по таблице истинности), что эта формула является тавтологией. Значит, мы имеем следующее правило вывода, которое в логике называют *правилом приведения к абсурду*.

$$\frac{\neg P \to C,\ \neg P \to \neg C}{P}.$$

Это правило и обосновывает возможность использования метода от противного.

Заметим, что посылку правила можно записать и так: $\neg P \to (C \wedge \neg C)$.

Таким образом, вместо того чтобы доказывать предложение P, можно доказать предложение $\neg P \to (C \wedge \neg C)$. На первый взгляд кажется, что доказательство предложения P мы заменяем на доказательство более сложного по структуре предложения. Однако второе утверждение бывает доказать проще. Разберемся, в чем здесь дело.

Дело в том, что при доказательстве P в качестве исходных предложений (из которых можно выводить первые следствия) выступают лишь ранее доказанные теоремы или аксиомы. При доказательстве же импликации $\neg P \to (C \wedge \neg C)$ мы имеем право использовать предложение $\neg P$, из которого можно выводить следствия.

Пример 5.4.1. Докажем теорему P: «Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания».

Вначале напомним определение. Касательной к окружности называется прямая, имеющая с ней одну общую точку. Предварительно доказывается, что если расстояние от центра окружности до прямой меньше радиуса, то эта прямая имеет две общие точки с окружностью.

Теперь докажем сформулированную теорему. Предположим противное. Пусть касательная к некоторой окружности с центром в точке O не перпендикулярна ее радиусу, проведенному в точку касания M (предложение $\rceil P$). Проведем радиус окружности в точку M и опустим перпендикуляр из точку O на касательную. Длина перпендикуляра, то есть расстояние от центра окружности касательной, будет меньше длины радиуса OM. Значит, прямая пересекает окружность в двух точках (предложение C).

Из определения касательной вытекает, что касательная пересекает окружность в одной точке. Отсюда следует предложение: «Неверно, что касательная пересекает окружность в двух точках» ($\rceil C$).

В этом случае говорят кратко: «Пришли в противоречие с определением касательной». Теорема доказана. •

При построении отрицания к теореме мы, возможно неосознанно, сформулировали теорему, выделив в ней условие и заключение: «Если прямая является касательной к окружности, то она перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания». Так как предложение имеет вид импликации $A \to B$, то отрицание к нему выражается формулой $A \wedge \rceil B$.

Когда теорема имеет вид $A \to B$, то в качестве условия выступает только предложение A. После того как мы построим отрицание к теореме, получим уже два предложения A и $\rceil B$, из которых можно выводить следствия.

В качестве предложения C, с которым ищется противоречие, может выступать любое предложение. Например, C и $\rceil C$ оба могут быть выведены при доказательстве теоремы. Часто в качестве C выбирают ранее доказанную теорему (так как C истинно, то его можно вывести в любом доказательстве). В этом случае из предположения требуется вывести отрицание $\rceil C$.

Пример 5.4.2. Докажем, что уравнение $2^x = 6$ не имеет рациональных корней. Другими словами, число $\log_2 6$ иррациональное.

Методом от противного докажем, что уравнение не имеет положительных решений. То, что уравнение не имеет неположительных решений, следует из свойств степеней: при $x \leq 0$ степень 2^x не превосходит 1.

Итак, требуется доказать утверждение P = «Уравнение $2^x = 6$ не имеет положительных рациональных корней».

Построим отрицание $\rceil P$ = «Уравнение имеет хотя бы один положительный рациональный корень». Выведем отсюда следствия.

Представим существующий по предположению рациональный корень уравнения $2^x = 6$ в виде несократимой дроби $\frac{n}{m}$, где n и m – натуральные числа. Тогда $2^{\frac{n}{m}} = 6$, откуда по свойствам степеней $2^n = 6^m$. Разложим левую и правую части на простые множители, получим $2^n = 2^m \cdot 3^m$. Получаем, что одно и то же натуральное число имеет два различных разложения на простые множители, что противоречит известной теореме.

Здесь в качестве предложения C выступает теорема, сформулированная в примере 4.2.9. Доказательство этой теоремы дается в курсе теории чисел. Итак, с одной стороны, верно C, с другой стороны, мы вывели его отрицание, так как нашли натуральное число, большее 1, которое имеет два различных разложения на простые множители. Полученное противоречие и доказывает исходную теорему. •

При доказательстве от противного также случается, что из отрицания к импликации $A \to B$ выводят $\rceil A$. Значит, с одной стороны, верно A (как условие), с другой стороны, выведено $\rceil A$. В этом случае говорят, что пришли в противоречие с условием теоремы (в качестве C здесь выступает условие A). Заметим, что если из $\rceil B$ вывести $\rceil A$, то отсюда сразу можно заключить, что из A следует B по правилу контрапозиции. Поэтому применение правила контрапозиции – это тоже своего рода рассуждения от противного.

Пример 5.4.3. Докажем утверждение: «Если число нечетное, то оно не делится на 4». Оно имеет вид импликации $A \to B$.

Можно рассуждать так. «Предположим противное. Пусть число нечетное и делится на 4 (предложение $A \wedge \rceil B$). Обозначим это число буквой x. Так как x четное, то $x=4n$, где n – целое. Тогда $x = 2(2n) = 2m$, где $m=2n$ – целое. Итак, x – четное число (предложение $\rceil A$). Пришли в противоречие с условием A. Следовательно, исходное предложение доказано».

Однако для доказательства утверждения можно просто применить правило контрапозиции, переформулировав исходное предложение в виде: «Если число делится на 4, то оно четное». Полученное предложение выводится прямым путем: предполагается, что число делится на 4, откуда следует, что оно является четным (см. пример 5.1.9). •

Замечание. Доказать импликацию $A \to B$ означает доказать, что она истинна при всех значениях переменных, от которых зависят A и B. Пусть A и B зависят от переменной x. Так как отрицание к формуле $\forall x\,(A(x) \to B(x))$

равносильно формуле $\exists x\,(A(x) \wedge \urcorner B(x))$, то при выводе следствий из предположения выбирают существующий объект x (он может быть обозначен и другой буквой), для которого верны A и $\urcorner B$, и рассуждают, понимая под x именно этот объект. Поэтому в примере 5.4.3 формулировку предположения можно уточнить: «Пусть существует нечетное число, делящееся на 4».

Рассмотрим случай, когда доказываемое предложение P утверждает существование объекта, обладающего некоторым свойством A ($P = \exists x\,A(x)$). Для доказательства P можно предположить, что P неверно: «Ни один объект x не обладает свойством A», и вывести отсюда два предложения C и $\urcorner C$.

Пример 5.4.4. Пусть имеются 5 ящиков, в которые произвольным образом раскладываются 16 предметов. Докажем, что найдется хотя бы один ящик, в котором будет находиться не менее четырех предметов.

Предположим противное. Построим отрицание к доказываемому предложению: «В каждом ящике лежит менее четырех предметов». Значит, в любом из 5 ящиков находится максимум 3 предмета. Поэтому всего имеем максимум 15 предметов.

Из условия следует, что число разложенных предметов больше 15 (это предложение C). А из рассуждений получилось, что число предметов не превосходит 15 (это предложение $\urcorner C$). Имеем противоречие. •

Методом от противного можно доказать утверждение из примера 5.2.2. Кратко рассмотрим схему такого доказательства.

Требуется доказать предложение $P =$ «Существует число, записанное одними единицами, которое делится на 23». Предполагаем, что ни одно из чисел, записанных одними единицами, не делится на 23 (предложение $\urcorner P$).

Рассмотрим последовательность чисел 1; 11; 111; ...; $\underbrace{11...1}_{23}$, каждое из которых разделим на 23 с остатком. Так как среди данных чисел нет кратных 23 (следует из предположения), то возможны следующие остатки: 1, 2, …, 22. Значит, среди 23 чисел по крайней мере два числа имеют одинаковый остаток. Поэтому разность этих чисел делится на 23. Но разность есть число вида 11…10…0, которое равно $11\ldots1 \cdot 10^t$, поэтому число 11…1 делится на 23. Итак, нашлось число, записанное одними единицами, которое делится на 23 (предложение P). Получаем противоречие.

В приведенном выше рассуждении в качестве C выступило исходное предложение P (или $\rceil P$). Тем самым вместо прямого доказательства предложения P была доказана истинность импликации $\rceil P \to P$.

Иногда методом от противного доказывают теоремы единственности. Пусть требуется доказать, что свойством A обладает не более чем один объект: $\forall x \forall y\, [(A(x) \wedge A(y)) \to (x=y)]$.

Рассуждения можно провести примерно так. Предполагают, что свойством A обладают объекты x и y, при этом $x \neq y$. Далее выводят следствия и получают противоречие.

Однако часто подобные рассуждения без существенных изменений можно провести без предположения о том, что x и y различны, то есть предполагать противное не обязательно. Лучше взять произвольные объекты x и y, такие, что $A(x)$ и $A(y)$, и показать, что они равны (см. пример 5.2.4).

Рассмотрим еще одну ситуацию. Пусть требуется доказать предложение B. При этом известно, что если B неверно, то верно некоторое предложение A (то есть верна импликация $\rceil B \to A$). Поэтому можно из A вывести противоречие; это и будет означать, что предложение B верно.

Очень часто в доказательствах используется утверждение о том, что среди двух или более предложений хотя бы одно истинно. Так как формула $A \vee B$ равносильна $\rceil B \to A$, то для доказательства B достаточно из A вывести противоречие, то есть показать, что A неверно. Здесь используется так называемое *правило исключения случая*:

$$\frac{A \vee B, \quad A \to (C \wedge \neg C)}{B}.$$

Эти рассуждения нетрудно обобщить, взяв вместо одного исключаемого случая A два или более.

Пусть известно, что выполняется хотя бы одно из трех утверждений A_1, A_2 или B, то есть верна дизъюнкция $A_1 \vee A_2 \vee B$ (другими словами, верна импликация $\rceil B \to (A_1 \vee A_2)$). Если будет доказано, что из каждого предложения A_1 и A_2 вытекает противоречие, то есть предложения A_1 и A_2 ложны, то отсюда можно будет заключить, что предложение B верно. Мы применили следующее правило исключения случаев:

$$\frac{A_1 \vee A_2 \vee B, \quad A_1 \to (C \wedge \neg C), \quad A_2 \to (C \wedge \neg C)}{B}.$$

Пример 5.4.5. Решим уравнение $3^x + 4^x = 25$.

Очевидно, что x=2 является корнем уравнения. Докажем, что других корней нет. Надо показать следующее: если число является корнем данного уравнения, то это число равно 2. Применим метод исключения случаев.

Пусть a – корень данного уравнения. Тогда $3^a + 4^a = 25$. Возможны только три случая: a<2, a>2, a=2.

Если a<2, то по свойствам степеней $3^a < 3^2$ и $4^a < 4^2$. Значит, $3^a + 4^a < 25$. Противоречие.

Если a>2, то $3^a > 3^2$ и $4^a > 4^2$. Поэтому $3^a + 4^a > 25$. Противоречие.

Следовательно, число a равно 2.

Итак, x=2 – единственный корень уравнения $3^x + 4^x = 25$.

При доказательстве было использовано предыдущее правило вывода. Здесь $A_1 = (a<2)$, $A_2 = (a>2)$, $B = (a=2)$. В качестве C мы взяли предположение: «a есть корень уравнения $3^x + 4^x = 25$». Вначале было доказано предложение $A_1 \to (C \wedge \rceil C)$, затем $A_2 \to (C \wedge \rceil C)$. Отсюда сделали вывод о том, что верно B.

Доказательство, конечно, можно оформить, сразу предположив противное. Тогда рассуждения можно было начать так: «Предположим, что существует корень уравнения, не равный 2. Обозначим его буквой a. Тогда a<2 или a>2…». •

5.5. Метод математической индукции

Метод доказательства, о котором будет идти речь в данном пункте, основан на одной из аксиом натурального ряда.

Аксиома индукции. Пусть дано предложение, зависящее от переменной n, вместо которой можно подставлять любые натуральные числа. Обозначим его $A(n)$. Пусть также предложение A верно для числа 1 и из того, что A верно для числа k, следует, что A верно для числа k+1. Тогда предложение A верно для всех натуральных значений n.

Символическая запись аксиомы:

$$[A(1) \wedge \forall k\, (A(k) \to A(k+1))] \to \forall n\, A(n).$$

Здесь n и k – переменные по множеству натуральных чисел. Из аксиомы индукции получается следующее правило вывода:

$$\frac{A(1),\ \forall k\big(A(k) \to A(k+1)\big)}{\forall n\, A(n)}.$$

Итак, для того чтобы доказать истинность предложения A, можно вначале доказать два утверждения: истинность высказывания $A(1)$, а также следствие $A(k) \Rightarrow A(k+1)$.

Учитывая сказанное выше, опишем сущность *метода математической индукции*.

Пусть требуется доказать, что предложение $A(n)$ верно для всех натуральных n. Доказательство разбивается на два этапа.

1-й этап. *База индукции*. Берем в качестве значения n число 1 и проверяем, что $A(1)$ есть истинное высказывание.

2-й этап. *Индуктивный переход*. Доказываем, что при любом натуральном числе k верна импликация: если $A(k)$, то $A(k+1)$.

Индуктивный переход начинается словами: «Возьмем произвольное натуральное число k, такое, что $A(k)$», или «Пусть для натурального числа k верно $A(k)$». Вместо слова «пусть» часто говорят «предположим, что…».

После этих слов буква k обозначает некий фиксированный объект, для которого выполняется соотношение $A(k)$. Далее из $A(k)$ выводим следствия, то есть строим цепочку предложений $A(k)$, P_1, P_2, …, $P_n = A(k+1)$, где каждое предложение P_i является истинным высказыванием или следствием предыдущих предложений. Последнее предложение P_n должно совпадать с $A(k+1)$. Отсюда заключаем: из $A(k)$ следует $A(k+1)$.

Выполнение индуктивного перехода можно расчленить на два действия:

1) Индуктивное предположение. Здесь мы предполагаем, что A верно для некоторого значения k переменной n.

2) На основе предположения доказываем, что A верно для числа $k+1$.

Пример 5.5.1. Докажем, что число n^2+n является четным при всех натуральных n.

Здесь $A(n)$ = «n^2+n – четное число». Требуется доказать, что A – тождественно истинный предикат. Применим метод математической индукции.

База индукции. Возьмем $n=1$. Подставим в выражение n^2+n, получим $n^2+n = 1^2 + 1 = 2$ – четное число, то есть $A(1)$ – истинное высказывание.

Сформулируем *индуктивное предположение* $A(k)$ = «Число k^2+k – четное». Можно сказать так: «Возьмем произвольное натуральное число k такое, что k^2+k есть четное число».

Выведем отсюда утверждение $A(k+1)$ = «Число $(k+1)^2+(k+1)$ – четное».

По свойствам операций выполним преобразования:

$$(k+1)^2+(k+1) = (k^2+2k+1)+(k+1) = (k^2+k)+(2k+2) = (k^2+k)+2(k+1).$$

Первое слагаемое полученной суммы четно по предположению, второе четно по определению (так как имеет вид $2n$). Значит, сумма есть четное число. Предложение $A(k+1)$ доказано.

По методу математической индукции делаем вывод: предложение $A(n)$ верно для всех натуральных n. •

Конечно, нет необходимости каждый раз вводить обозначение $A(n)$. Однако все же рекомендуется отдельной строкой формулировать индуктивное предположение и то, что требуется из него вывести.

Заметим, что утверждение из примера 5.5.1 можно доказать без использования метода математической индукции. Для этого достаточно рассмотреть два случая: когда n четно и когда n нечетно.

Многие задачи на делимость решаются методом математической индукции. Рассмотрим более сложный пример.

Пример 5.5.2. Докажем, что число $15^{2n-1}+1$ делится на 8 при всех натуральных n.

База индукции. Возьмем $n=1$. Имеем: число $15^{2\cdot1-1}+1 = 15+1 = 16$ делится на число 8.

Индуктивный переход. *Предположим*, что для некоторого натурального числа k число $15^{2k-1}+1$ делится на 8.

Докажем, что тогда число $a = 15^{2(k+1)-1}+1$ делится 8.

Преобразуем число a:

$$a = 15^{2k+2-1}+1 = 15^{(2k-1)+2}+1 = 15^{2k-1}\cdot15^2+1 = 15^{2k-1}\cdot225+(225-224) =$$
$$= (15^{2k-1}\cdot225+225)-224 = 225\cdot(15^{2k-1}+1)-224.$$

По предположению, число $15^{2k-1}+1$ делится на 8, значит, все первое слагаемое делится на 8. Второе слагаемое $224=8\cdot28$ также делится на 8. Таким образом, число a как разность двух чисел, кратных 8, делится на 8. Индуктивный переход обоснован.

На основе метода математической индукции заключаем, что для всех натуральных n число $15^{2n-1}+1$ делится на 8.

Сделаем некоторые замечания по решенной задаче.

Доказанное утверждение можно сформулировать немного по-другому: «Число 15^m+1 делится на 8 при любых нечетных натуральных m».

Во-вторых, из доказанного общего утверждения можно сделать частный вывод, доказательство которого может быть дано как отдельная задача: число $15^{2015}+1$ делится на 8. Поэтому иногда бывает полезно обобщить задачу, обозначив какое-то конкретное значение буквой, а затем применить метод математической индукции. •

В самом общем понимании термин «индукция» означает, что на основе частных примеров делают общие выводы. Например, рассмотрев некоторые примеры сумм четных чисел 2+4=6, 2+8=10, 4+6=10, 8+12=20, 16+22=38, делаем вывод о том, что сумма любых двух четных чисел есть четное число.

В общем случае вот такая индукция может привести к неверным выводам. Приведем пример подобного неправильного рассуждения.

Пример 5.5.3. Рассмотрим число $a = n^2+n+41$ при натуральном n.

Найдем значения a при некоторых значениях n.

Пусть n=1. Тогда a = 43 – простое число.

Пусть n=2. Тогда a = 4+2+41 = 47 – простое.

Пусть n=3. Тогда a = 9+3+41 = 53 – простое.

Пусть n=4. Тогда a = 16+4+41 = 61 – простое.

Возьмите в качестве значений n следующие за четверкой числа, например 5, 6, 7, и убедитесь, что число a будет простым.

Делаем вывод: «При всех натуральных n число a будет простым».

В результате получилось ложное высказывание. Приведем контрпример: n=41. Убедитесь, что при данном n число a будет составным. •

Термин «математическая индукция» несет в себе более узкий смысл, так как применение этого метода позволяет получить всегда верное заключение.

Пример 5.5.4. Получим на основе индуктивных рассуждений формулу общего члена арифметической прогрессии. Напомним, что арифметической прогрессией называется числовая последовательность, каждый член которой отличается от предыдущего на одно и то же число, называемое разностью прогрессии. Для того чтобы однозначно задать арифметическую прогрессию, нужно указать ее первый член a_1 и разность d.

Итак, по определению $a_{n+1} = a_n + d$, при $n \geq 1$.

В школьном курсе математики, как правило, формула общего члена арифметической прогрессии устанавливается на основе частных примеров, то есть именно по индукции.

Если n=1, то $a_1 = a_1$, то есть $a_1 = a_1+d(1–1)$.

Если n=2, то $a_2 = a_1+d$, то есть $a_1 = a_1+d(2–1)$.

Если n=3, то $a_3 = a_2+d = (a_1+d)+d = a_1+2d$, то есть $a_3 = a_1+d(3–1)$.

Если n=4, то $a_4 = a_3+d = (a_1+2d)+d = a_1+3d$ и т.д.

Приведенные частные примеры позволяют выдвинуть гипотезу: формула общего члена имеет вид $a_n = a_1+(n–1)d$ для всех $n \geq 1$.

Докажем эту формулу методом математической индукции.

База индукции проверена в предыдущих рассуждениях.

Пусть k – такой номер, при котором $a_k = a_1+(k–1)d$ (*индуктивное предположение*).

Докажем, что $a_{k+1} = a_1+((k+1)–1)d$, то есть $a_{k+1} = a_1+kd$.

По определению $a_{k+1} = a_k+d$. По индуктивному предположению $a_k = a_1+(k–1)d$, значит, $a_{k+1} = a_1+(k–1)d+d = a_1+(k–1+1)d = a_1+kd$, что и требовалось доказать (для обоснования индуктивного перехода).

Теперь формула $a_n = a_1+(n–1)d$ доказана для любого натурального номера n. •

Пусть дана некоторая последовательность a_1, a_2, …, a_n, … (не обязательно арифметическая или геометрическая прогрессия). Часто возникают задачи, где требуется суммировать первые n членов этой последовательности, то есть задать сумму $a_1+a_2+…+a_n$ формулой, которая позволяет находить значения этой суммы, не вычисляя члены последовательности.

Пример 5.5.5. Докажем, что сумма первых n натуральных чисел равна $\frac{n(n+1)}{2}$.

Обозначим сумму $1+2+…+n$ через S_n. Найдем значения S_n для некоторых n.

$S_1 = 1$, $S_2 = 1+2 = 3$, $S_3 = 1+2+3 = 6$, $S_4 = 1+2+3+4 = 10$.

Заметим: для того чтобы найти сумму S_4, можно воспользоваться вычисленным ранее значением S_3, так как $S_4 = S_3+4$.

Если подставить рассмотренные значения n в терм $\frac{n(n+1)}{2}$, то получим, соответственно, те же суммы 1, 3, 6, 10. Эти наблюдения наталкивают на мысль, что формулу $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ можно использовать при любом n. Докажем эту гипотезу методом математической индукции.

База индукции проверена. Выполним *индуктивный переход*.

Предположим, что формула верна для некоторого натурального числа k, то есть сумма первых k натуральных чисел равна $\frac{k(k+1)}{2}$.

Докажем, что сумма первых $(k+1)$ натуральных чисел равна $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

Выразим S_{k+1} через S_k. Для этого в сумме S_{k+1} сгруппируем первые k слагаемых, а последнее слагаемое запишем отдельно:

$$S_{k+1} = (1+2+\ldots+k)+(k+1) = S_k+(k+1).$$

По индуктивному предположению $S_k = \frac{k(k+1)}{2}$. Значит, чтобы найти сумму первых $(k+1)$ натуральных чисел, достаточно к уже вычисленной сумме первых k чисел, равной $\frac{k(k+1)}{2}$, прибавить одно слагаемое $(k+1)$. Имеем:

$$S_{k+1} = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Индуктивный переход обоснован. Тем самым выдвинутая вначале гипотеза доказана.

Мы привели доказательство формулы $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ методом математической индукции. Конечно, есть и другие доказательства. Например, можно записать сумму S_n в порядке возрастания слагаемых, а затем в порядке убывания слагаемых:

$$S_n = 1 + \quad 2 \quad + \quad 3 \quad + \ldots + (n-2) + (n-1) + n,$$
$$S_n = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + \quad 3 \quad + \quad 2 \quad + 1.$$

Сумма слагаемых, стоящих в одном столбце, постоянна (в одной сумме каждое следующее слагаемое уменьшается на 1, а в другой увеличивается на 1) и равна $(n+1)$. Поэтому, сложив полученные суммы, будем иметь n слагаемых, равных $(n+1)$. Итак, удвоенная сумма S_n равна $n(n+1)$.

Доказанная формула может быть получена как частный случай формулы суммы первых n членов арифметической прогрессии. •

Вернемся к методу математической индукции. Отметим, что первый этап метода математической индукции (база индукции) всегда необходим. Отсутствие этого этапа может привести к неверному выводу.

Пример 5.5.6. «Докажем» предложение: «Число 7^n+1 делится на 3 при любом натуральном n».

«Предположим, что при некотором натуральном значении k число 7^k+1 делится на 3. Докажем, что число $7^{k+1}+1$ делится на 3. Выполним преобразования:

$$7^{k+1} + 1 = 7^k \cdot 7 + (7 - 6) = 7\cdot(7^k + 1) - 6.$$

Число 6 очевидно делится на 3. Число 7^k+1 делится на 3 по индуктивному предположению, значит, число $7\cdot(7^k + 1)$ также делится на 3. Поэтому разность чисел, делящихся на 3, будет также делиться на 3.

Предложение доказано».

Доказательство исходного предложения неверно, несмотря на то что индуктивный переход выполнен правильно. Действительно, при n=1 имеем число 8, при n=2 – число 50, …, и ни одно из этих чисел не делится на 3. •

Сделаем важное замечание об обозначении натурального числа при выполнении индуктивного перехода. При формулировке предложения $A(n)$ буквой n мы обозначали переменную, вместо которой можно подставлять любые натуральные числа. При формулировке индуктивного предположения мы обозначали значение переменной буквой k. Однако очень часто вместо новой буквы k используют ту же самую букву, которой обозначается переменная. Это никак не влияет на структуру рассуждений при выполнении индуктивного перехода.

Рассмотрим еще несколько примеров задач, для решения которых можно применить метод математической индукции.

Пример 5.5.7. Найдем значение суммы

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{99\cdot 100}.$$

В задании переменная n не фигурирует. Однако рассмотрим последовательность слагаемых:

$$a_1=\frac{1}{1\cdot 2},\ a_2=\frac{1}{2\cdot 3},\ \ldots,\ a_n=\frac{1}{n(n+1)},\ a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)(n+2)},\ \ldots$$

Обозначим $S_n = a_1+a_2+\ldots+a_n$. Найдем S_n при некоторых n.

Если n=1, то $S_1 = a_1 = \dfrac{1}{2}$.

Если n=2, то $S_2 = a_1 + a_2 = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$.

Если n=3, то $S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

Можете самостоятельно вычислить значения S_n при $n = 4$; 5. Возникает естественное предположение: $S_n = \frac{n}{n+1}$ при любом натуральном n. Докажем это методом математической индукции.

База индукции проверена выше.

Выполним *индуктивный переход*, обозначая произвольно взятое значение переменной n этой же буквой, то есть докажем, что из равенства $S_n = \frac{n}{n+1}$ следует равенство $S_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$.

Предположим, что верно равенство $S_n = \frac{n}{n+1}$.

Выделим в сумме S_{n+1} первые n слагаемых:

$$S_{n+1} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = S_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Применив индуктивное предположение, получим:

$$S_{n+1} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}.$$

Сокращая дробь на (n+1), будем иметь равенство $S_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$.

Индуктивный переход обоснован.

Тем самым доказано, что сумма первых n слагаемых $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$ равна $\frac{n}{n+1}$. Теперь возвратимся к первоначальной задаче. Для ее решения достаточно взять в качестве значения n число 99. Тогда сумма $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{99\cdot 100}$ будет равна числу 0,99.

Постарайтесь вычислить данную сумму другим способом. •

Пример 5.5.8. Докажем, что производная суммы любого конечного числа дифференцируемых функций равна сумме производных этих функций.

При доказательстве будем считать известным утверждение: производная суммы двух функций равна сумме производных этих функций.

Пусть переменная n обозначает количество данных функций. В случае, когда дана только одна функция, под суммой понимается именно эта функция. Поэтому если n=1, то утверждение очевидно истинно: $f' = f'$.

Предположим, что утверждение справедливо для набора из n функций (здесь снова вместо буквы k взята буква n), то есть производная суммы n функций равна сумме производных.

Докажем, что производная суммы (n+1) функций равна сумме производных. Возьмем произвольный набор, состоящий из n+1 дифференцируемой функции: $f_1, f_2, \ldots, f_{n+1}$. Представим сумму этих функций в виде $g + f_{n+1}$, где $g = f_1 + f_2 + \ldots + f_n$ – сумма n функций. По индуктивному предположению производная функции g равна сумме производных: $g' = f_1' + f_2' + \ldots + f_n'$. Поэтому имеет место следующая цепочка равенств:

$$(f_1 + \ldots + f_n + f_{n+1})' = (g + f_{n+1})' = g' + f_{n+1}' = (f_1' + \ldots + f_n') + f_{n+1}' =$$
$$= f_1' + \ldots + f_n' + f_{n+1}'.$$

Индуктивный переход выполнен.

Таким образом, исходное предложение доказано для любого конечного числа функций. •

В ряде случаев требуется доказать истинность предложения $A(n)$ для всех натуральных n, начиная с некоторого значения c. Доказательство методом математической индукции в таких случаях проводится по следующей схеме.

База индукции. Доказываем, что предложение A верно для значения n, равного c.

Индуктивный переход. 1) Предполагаем, что предложение A верно для некоторого значения k переменной n, которое больше либо равно c.

2) Доказываем, что предложение A истинно для значения n, равного k+1.

Снова заметим, что вместо буквы k часто оставляют обозначение переменной n. В этом случае индуктивный переход начинают словами: «Предположим, что для некоторого значения $n \geq c$ верно $A(n)$. Докажем, что тогда верно $A(n+1)$».

Пример 5.5.9. Докажем, что при всех натуральных $n \geq 5$ верно неравенство $2^n > n^2$.

База индукции. Пусть n=5. Тогда 2^5=32, 5^2=25. Неравенство 32>25 истинно.

Индуктивный переход. *Предположим*, что имеет место неравенство $2^n > n^2$ для некоторого натурального числа $n \geq 5$. *Докажем*, что тогда $2^{n+1} > (n+1)^2$.

По свойствам степеней $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$. Так как $2^n > n^2$ (по индуктивному предположению), то $2 \cdot 2^n > 2n^2$ (1).

Обоснуем, что $2n^2$ больше $(n+1)^2$. Это можно сделать разными способами. Достаточно решить квадратное неравенство $2x^2 > (x+1)^2$ во множестве действительных чисел и увидеть, что все натуральные числа, большие либо равные 5, являются его решениями.

Мы поступим следующим образом. Найдем разность чисел $2n^2$ и $(n+1)^2$:

$$2n^2 - (n+1)^2 = 2n^2 - n^2 - 2n - 1 = n^2 - 2n - 1 = (n^2 - 2n + 1) - 2 = (n+1)^2 - 2.$$

Так как $n \geq 5$, то $n+1 \geq 6$, значит, $(n+1)^2 \geq 36$. Поэтому разность больше 0. Итак, $2n^2 > (n+1)^2$ (2).

По свойствам неравенств из (1) и (2) следует, что $2 \cdot 2^n > (n+1)^2$, что и требовалось доказать для обоснования индуктивного перехода.

На основе метода математической индукции заключаем, что неравенство $2^n > n^2$ истинно для любых натуральных чисел n. •

Рассмотрим еще одну форму метода математической индукции. Отличие заключается в индуктивном переходе. Для его осуществления требуется выполнить два шага:

1) предположить, что предложение $A(n)$ верно при всех значениях переменной n, меньших некоторого числа p;

2) из выдвинутого предположения вывести, что предложение $A(n)$ справедливо и для числа p.

Таким образом, индуктивный переход требует доказательства следствия: $[(\forall n<p)\ A(n)] \Rightarrow A(p)$. Заметим, что следствие можно переписать в виде: $[(\forall n\leq p)\ A(n)] \Rightarrow A(p+1)$.

В первоначальной формулировке метода математической индукции при доказательстве предложения $A(p)$ мы опирались только на «предыдущее» предложение $A(p-1)$. Данная здесь формулировка метода позволяет выводить $A(p)$, считая, что все предложения $A(n)$, где n меньше p, истинны.

Пример 5.5.10. Докажем теорему: «Сумма внутренних углов любого n-угольника равна $180° \cdot (n-2)$».

Для выпуклого многоугольника теорему легко доказать, если разбить его диагоналями, проведенными из одной вершины, на треугольники. Однако для невыпуклого многоугольника такая процедура может быть невозможна.

Докажем теорему для произвольного многоугольника методом математической индукции. Будем считать известным следующее утверждение, которое, строго говоря, требует отдельного доказательства: «В любом n-угольнике существует диагональ, лежащая целиком во внутренней его части».

Вместо переменной n можно подставлять любые натуральные числа, которые больше либо равны 3. Для $n=3$ теорема справедлива, так как в треугольнике сумма углов равна 180°.

Возьмем некоторый p-угольник ($p\geq 4$) и предположим, что сумма углов любого n-угольника, где $n < p$, равна $180°\cdot(n-2)$. Докажем, что сумма углов p-угольника равна $180°\cdot(p-2)$.

Проведем диагональ p-угольника, лежащую внутри него. Она разобьет p-угольник на два многоугольника. Пусть один из них имеет k_1 сторон, другой – k_2 сторон. Тогда $k_1+k_2-2 = p$, так как полученные многоугольники имеют общей стороной проведенную диагональ, не являющуюся стороной исходного p-угольника.

Оба числа k_1 и k_2 меньше n. Применим к полученным многоугольникам индуктивное предположение: сумма углов k_1-угольника равна $180°\cdot(k_1-2)$, а сумма углов k_2-угольника равна $180°\cdot(k_2-2)$. Тогда сумма углов p-угольника будет равна сумме этих чисел:

$$180°\cdot(k_1-2)+180°\cdot(k_2-2) = 180°\cdot(k_1+k_2-2-2) = 180°\cdot(p-2).$$

Индуктивный переход обоснован. На основе метода математической индукции теорема доказана для любого n-угольника ($n\geq 3$). •

Глава 2. Язык множеств

Введение

Понятие множества является основополагающим понятием классической математики. Создатель теории множеств немецкий математик Георг Кантор (1845–1918) описывал это понятие так: «Множество есть многое, мыслимое как единое». В настоящее время понятие множества используется во всех разделах математики.

Можно дать следующее описательное определение множества: *множеством* называется любая совокупность произвольных объектов, собранных вместе и составляющих единое целое. Объекты, составляющие данное множество, называются его *элементами*. Если объект a является элементом множества S, то пишут $a \in S$. В этом случае говорят, что a принадлежит множеству S (также говорят «a лежит в S» или просто «a из S»). Знак $\in$ называют знаком принадлежности элемента множеству. Отрицание к предложению $a \in S$ обозначают $a \notin S$ и говорят, что a не является элементом множества S (не лежит в S, не принадлежит S).

Для наглядности, как правило, множества обозначают большими буквами, а их элементы – малыми. Однако никто не запрещает нам одно множество считать элементом другого множества. Поэтому, например, корректна запись $A \in B$. И вообще, данное выше описание множества является очень общим и практически не дает никаких ограничений. Такое простое для понимания определение в математике имеет существенные недостатки, так как приводит к противоречиям.

Рассмотрим парадокс, который был открыт Расселом в 1902 г. По законам логики для любого множества S среди предложений «S является элементом самого себя» (символически $S \in S$) и «S не является элементом самого себя» (то есть $S \notin S$) ровно одно предложение истинно. Рассмотрим множество A всех множеств, которые не являются элементами самих себя. Уточним: элементы множества A – это в точности такие множества X, для которые выполняется соотношение $X \notin X$.

Выясним, какое из утверждений $A \in A$ или $A \notin A$ истинно.

Если $A \in A$, то A является элементом множества A, значит, для $X=A$ выполняется соотношение $A \notin A$. Получили противоречие.

Если $A \notin A$, то для $X=A$ выполняется соотношение $X \notin X$. Значит, A является элементом множества A. Поэтому $A \in A$. Получили противоречие.

Таким образом, оба высказывания $A \in A$ и $A \notin A$ ложны, что не соответствует законам логики.

Итак, данное выше общее, неограниченное, интуитивно ясное понимание множества не может считаться математическим определением. Выход заключается в уточнении понятия множества.

Рассмотрим подход, который предложил американский математик Джон фон Нейман (1903–1957). То, что у Кантора является множеством, то есть совокупность любых объектов, он назвал классом; при этом множеством называется класс, служащий элементом некоторого класса. При таком подходе запрещено образование классов, элементами которых были бы классы, не являющиеся множествами. В этом случае рассуждения в парадоксе Рассела уже не ведут к противоречию. Класс A, состоящий из всевозможных *множеств*, не являющихся своими элементами, не будет множеством. Так как A не является множеством, то класс A не будет элементом самого себя. Противоречия в этом случае не получается.

Класс всех классов мы образовать не можем, но имеет смысл понятие класса всех множеств, однако сам этот класс не будет множеством.

Другой подход заключается в создании аксиоматической теории множеств. В этом случае понятия множества и отношения принадлежности объявляются первичными, неопределяемыми (то есть им не дается никаких определений). Далее формулируется список аксиом, то есть предложений, которым должны удовлетворять множества. Эти аксиомы ограничивают способы получения множеств и не позволяют получать такие монстры, как множество A в парадоксе Рассела или множество всех множеств.

Первая подобная аксиоматизация дана немецким математиком Эрнстом Цермело (1871–1953) в 1904–1908 гг. В дальнейшем эта аксиоматика была усовершенствована математиком и логиком Абрахамом Френкелем (1891–1965) в 1922 г. Аксиоматика Цермело–Френкеля (ее называют системой ZF) стала одной из важнейших аксиоматизаций теории множеств, лежащих в основе современной классической математики.

Для того чтобы успешно освоить основы теории множеств и пользоваться языком теории множеств при изучении математических дисциплин, нет необходимости рассматривать аксиоматическую теорию множеств, вполне достаточно оперировать так называемой наивной теорией, основы которой были заложены Кантором (поэтому эту теорию часто называют канторовской теорией множеств). В данной главе мы изложим даже не саму теорию множеств, а ее начала, то есть сформулируем основные понятия, касающиеся множеств, определим операции над множествами, в том числе операцию прямого произведения, и поговорим о связях (или отношениях) между элементами множеств, их свойствах, видах и использовании в математике.

В нашем дальнейшем изложении мы будем достаточно свободно оперировать термином «множество», иногда употребляя вместо этого термина другие (чтобы исключить частое повторение одного слова): «собрание», «совокупность», «система», «класс», и т. п. В общем случае считаем их синонимами термина «множество». Будем так поступать, когда это не приводит к путанице. Заметим, что иногда в указанные термины вкладывается дополнительный различный смысл (например, система уравнений и совокупность уравнений).

Чтобы исключить противоречия, сделаем ограничение: не рассматривать множество всех множеств и вообще считать, что ни для какого множества S принадлежность $S \in S$ невозможна.

Приведем общепринятые обозначения основных числовых множеств:

N – множество всех натуральных чисел,

Z – множество всех целых чисел,

Q – множество всех рациональных чисел,

I – множество всех иррациональных чисел,

R – множество всех действительных чисел.

Как принято в алгебре, геометрии и математическом анализе, число 0 к натуральным числам не относится. Однако в некоторых областях математики нуль считают натуральным числом. Чтобы не было путаницы, множество натуральных чисел с добавленным нулем обозначим $\mathbf{N}_0$. Получим множество целых неотрицательных чисел.

Отметим также, что понятие множества в математике не совпадает с обыденным пониманием множества как большой совокупности объектов. В математике множество может содержать любое число объектов, например один или два, а может не содержать ни одного объекта.

§ 6. Множества: способы задания и основные понятия

6.1. Способы задания множеств

Вначале определим, какие множества считаются одинаковыми.

Множества A и B называются *равными* ($A=B$), если они состоят из одних и тех же элементов.

Чтобы придать этому определению математический смысл, запишем его, используя отношение принадлежности и логические знаки:

$$A=B \overset{опр}{\Leftrightarrow} \forall x\ (x\in A \leftrightarrow x\in B).$$

Поскольку множества, состоящие из одних и тех же элементов, равны, то любой предикат $P(x)$ определяет в точности одно множество S, в котором лежат все элементы, удовлетворяющие свойству P, и не лежит ни один объект, не удовлетворяющий свойству P. Поэтому

$$\forall x\ (x\in S \leftrightarrow P(x)=u).$$

Такое множество обозначают $\{x \mid P(x)\}$ или $\{x : P(x)\}$. Каждую из этих схем можно прочесть так: «Множество всех x, таких, что $P(x)$».

Свойство P называется *характеристическим* (или *определяющим*) *свойством* множества S. Для предиката $P(x)$ множество S называется его *множеством истинности*.

Пример 6.1.1. Рассмотрим множество S всех чисел, больших 10. Так как любое число, большее 10, является положительным, то все элементы множества S удовлетворяют свойству ($x>0$). Однако это свойство не является характеристическим для данного множества, так как некоторые элементы, например число 5, не лежат в S, но свойству ($x>0$) удовлетворяют. Характеристическое свойство множества S может быть выражено такой формулой: $x>10$. Поэтому $S=\{x \mid x>10\}$. Тогда множество можно прочитать так: S – множество всех чисел x, таких, что $x>10$.

Учитывая, что мы имеем характеристическое свойство, более точно следовало бы говорить так: S – множество всех тех и только тех x, для которых $x>10$, или, в общем случае, «Множество всех тех и только тех x, для которых $P(x)$». Такой оборот речи иногда используют, однако мы будем стараться употреблять краткую формулировку. •

Для определенного одноместного предиката $P(x)$ выражение $\{x \mid P(x)\}$ является именем конкретного множества, не зависящего от переменной x. Поэтому переменная x является связанной и ее можно заменить на другую букву. Например, $\{x \mid x>10\} = \{y \mid y>10\}$.

В каждом разделе математики (или при решении определенного круга задач) рассматривают множества, составленные из объектов некоторого фиксированного множества. Например, решая уравнения в алгебре, мы оперируем с числами, и нас не интересуют такие объекты, как окружности. И наоборот, например, в планиметрии мы работаем с точками плоскости и, возможно, с множествами этих точек. Множество всех рассматриваемых объектов называют *универсальным множеством*.

Замечание. Строго говоря, под универсальным множеством в современной математике понимается не только то множество, с объектами которого мы работаем в данный момент. Рассматривая, например, действительные числа, не следует считать универсальным множеством множество **R**. Необходимо также включить в это универсальное множество всевозможные множества пар действительных чисел, семейства множеств действительных чисел, множества функций и т. д. Строгое определение универсального множества дано в учебном пособии [4].

Пример 6.1.2. Пусть $a,b\in\mathbf{R}$. Определим числовые промежутки в **R**:
$[a;b] = \{x \mid a\le x\le b\}$ – отрезок, $(a;b) = \{x \mid a<x<b\}$ – интервал;
$[a;b) = \{x \mid a\le x<b\}$ – полуотрезок, $(a;b] = \{x \mid a<x\le b\}$ – полуинтервал;
$[a;+\infty) = \{x \mid x\ge a\}$, $(-\infty;b] = \{x \mid x\le b\}$ – лучи. •

Пусть $A = \{x \mid P(x)\}$, $B = \{x \mid Q(x)\}$.

Учитывая, что предикат $P(x)$ равносилен утверждению $x\in A$, а предикат $Q(x)$ – утверждению $x\in B$, получаем, что равносильность предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ означает равенство их множеств истинности A и B.

Пример 6.1.3. Множества $\{x \mid x$ – четное число$\}$ и $\{x \mid x^2$ – четное число$\}$, рассматриваемые как подмножества в **Z**, равны. На языке предикатов имеем равносильность предикатов «x – четное число» и «x^2 – четное число».

Действительно, если число является четным, то есть имеет вид $2n$, где n целое число, то его квадрат имеет вид $4n^2$ – также четное число.

Обратно, пусть для целого x число x^2 четное. Надо доказать, что x четное. Применим правило контрапозиции и вместо этого докажем утверждение: если число x нечетное, то число x^2 нечетное. Данное предложение легко обосновать:

$$x=2n+1 \Rightarrow x^2 = (2n+1)^2 = 4n^2+4n+1 = 2(2n^2+2n)+1 = 2k+1.$$

Понятно, что если n целое, то число k также будет целым.

Равносильность предикатов (или, что то же самое, равенство их множеств истинности) доказана. •

Если рассматриваются элементы из множества M, то пишут $S = \{x\in M \mid P(x)\}$ и читают: «Множество всех x из M, таких, что $P(x)$».

Пример 6.1.4. $S = \{x \in \mathbf{Z} \mid x^2 < 4x\}$ – множество всех целых чисел x, таких, что x^2 меньше, чем $4x$. Другими словами, S есть множество всех целых решений неравенства $x^2 < 4x$. Чтобы найти все элементы этого множества, нужно решить неравенство и отобрать среди решений целые числа. •

Итак, в самом общем случае множество можно задать, указав характеристическое свойство своих элементов.

Также множество можно однозначно задать, если удастся перечислить все его элементы (через запятую или точку запятой). В этом случае элементы заключаются в фигурные скобки. Пишут $S = \{\langle$перечисление элементов$\rangle\}$. Заметим, что порядок перечисления элементов множества S не имеет значения.

Множество из примера 6.1.4 может быть задано так: $S=\{1,2,3\}$. Это же самое множество можно записать $\{2,3,1\}$.

Пример 6.1.5. Все три множества $\{a,b,c,d\}$, $\{c,a,b,d\}$, $\{a,b,c,a,c,d\}$ равны между собой. •

Договоримся в дальнейшем при перечислении элементов множества каждый элемент записывать по одному разу.

Будем каждому элементу множества S сопоставлять последовательные натуральные числа – номера, начиная с единицы, так, чтобы каждый элемент имел ровно один номер. Другими словами, организуем счет элементов. Элемент с номером i обозначим a_i. Пусть для некоторого натурального числа n множество S имеет вид $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Тогда число n определяет количество элементов множества S, при этом пишут $|S|=n$. Такое множество называют *конечным*, содержащим n элементов, или, кратко, *n-элементным*. При любой другой нумерации элементов ни множество, ни количество его элементов не изменятся.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается $\varnothing$. Пустое множество может быть задано любым противоречивым свойством, например, $\varnothing=\{x \mid x \neq x\}$ или $\varnothing=\{x \in \mathbf{R} \mid x^2+1=0\}$. Пустое множество также считается конечным.

Множество, не являющееся конечным, называется *бесконечным*. Говорят, что бесконечное множество содержит бесконечно много элементов. Конечные множества различаются числом элементов. Оказывается, что бесконечные множества также различаются количеством элементов, однако это количество выражается не натуральными числами (мощностями, кардинальными числами). Этими вопросами как раз и занимается теория множеств.

Приведем сейчас примеры конечных и бесконечных множеств.

Пример 6.1.6. Основные числовые множества **N**, **Z**, **Q**, **I**, **R** бесконечны. Бесконечно также множество всех окружностей на плоскости.

Докажем бесконечность множества $A = \{x\in\mathbf{Q} \mid 0<x<1\}$ всех рациональных чисел из отрезка (0;1). Если бы множество A было n-элементным, то, рассмотрев рациональные числа $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots,\frac{1}{n},\frac{1}{n+1}$, мы получили бы n различных элементов множества A. Однако в этом множестве лежит еще число $\frac{1}{n+2}$. Итак, ни для какого числа n множество A не является n-элементным. •

Пример 6.1.7. Множество $\{x\in\mathbf{R} \mid x^2=1\}$ конечно и содержит два числа. Множество целых решений неравенства $|x|<100$ является 199-элементным.

Множество людей, находящихся на территории Кировской области в данный момент времени, конечно. Это множество содержит много элементов, но не бесконечно много. Несмотря на то что практически найти число его элементов затруднительно (с течением времени оно меняется), все же в фиксированный момент времени это множество содержит определенное количество элементов, выраженное натуральным числом. •

Приведем примеры множеств, элементами которых также являются множества. Сразу отметим, что следует различать объект a и множество $\{a\}$, содержащее единственный элемент a.

Пример 6.1.8. Множества **N** и $\{\mathbf{N}\}$ различны. **N** – это бесконечное множество натуральных чисел, а $\{\mathbf{N}\}$ – одноэлементное множество, единственным элементом которого является множество натуральных чисел.

$\{\{1,2\},\{1,2,3\}\}$ – двухэлементное множество, элементами которого являются множества: одно множество двухэлементное $\{1,2\}$, другое – трехэлементное $\{1,2,3\}$.

Если в выражении $\{\{1,2\},\{1,2,3\}\}$ убрать внутренние скобки, то получим $\{1,2,1,2,3\}=\{1,2,3\}$ – трехэлементное множество, элементами которого являются числа. •

Как правило, перечислением элементов задают конечные множества, содержащие небольшое число элементов. Однако бывают ситуации, когда бесконечное множество задают, указав некоторые его элементы, при условии, что ясен закон получения новых элементов.

Пример 6.1.9. $A = \{2,5,8,11, \ldots, n, n+3, \ldots\}$. Чтобы получить новый элемент, надо к наибольшему из имеющихся элементов прибавить 3.

Надо понимать, что одна только запись $A = \{2,5,8,11,\ldots\}$ без пояснений задает множество неоднозначно. Однако для краткости иногда так пишут, подразумевая в уме способ получения новых элементов.

Зададим множество A математически строго, указав его характеристическое свойство. Множество A содержит все члены арифметической прогрессии, первый член которой равен 2, а разность равна 3. Каждый такой элемент имеет вид $a_n=2+3(n-1)=3n-1$, где n – натуральное число. Никаких других элементов множество A не содержит. Поэтому предложение «Число x имеет вид $3n-1$ для некоторого натурального числа n» является характеристическим свойством множества A. Итак,

$$A = \{x \mid \exists n\in\mathbf{N}\ (x=3n-1)\}. \bullet$$

Пусть дана бесконечная последовательность чисел $a_1, a_2,\ldots, a_n,\ldots$. Множество S элементов этой последовательности может быть задано следующим образом: $S = \{x \mid \exists n\in\mathbf{N}\ (x=a_n)\}$.

Если известна формула общего члена последовательности, то множество можно задать схемой $S = \{a_n \mid n\in\mathbf{N}\}$, указав общий вид элемента a_n.

Множество из примера 6.1.9 можно записать $A = \{3n-1 \mid n\in\mathbf{N}\}$. Заметим, что общий вид элементов множества A также может быть задан формулой $a_n=2+3n$, где n принимает целые неотрицательные значения. Поэтому множество A можно записать по-другому: $A = \{2+3n \mid n\in\mathbf{N}_0\}$.

Пусть дан терм $f(x)$, где переменная x может принимать любые значения из множества M. Множество всех y, таких, что $y=f(x)$ для некоторого значения x из M, есть множество значений выражения $f(x)$. Такое множество $S = \{y \mid \exists x\in M\ (y = f(x))\}$ может быть записано по сокращенной схеме:

$$S = \{f(x) \mid x\in M\}.$$

Пример 6.1.10. Множество $B = \{x^2-2x+3 \mid x\in\mathbf{R}\}$ равно промежутку $[2;+\infty)$. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно найти множество значений квадратичной функции $y=x^2-2x+3$.

Можно рассуждать по-другому. Выделим полный квадрат $y=(x-1)^2+2$. Так как выражение $(x-1)^2$ при всех x неотрицательно, то все значения y (то есть все элементы множества B) принадлежат промежутку $[2;+\infty)$. При этом для любого числа a из промежутка $[2;+\infty)$ уравнение $(x-1)^2+2=a$ имеет решение: при $a=2$ будет один корень $x=1$, при $a>2$ будет два корня $x=1\pm\sqrt{a-2}$. Таким образом, предикаты $\exists x\in\mathbf{R}\,(y=x^2-2x+3)$ и $y\geq 2$ (от переменной y) равносильны, значит, определяют равные множества. •

6.2. Понятие подмножества. Отношение включения

Множество A называют *подмножеством* множества S (или в множестве S), если каждый элемент множества A является элементом множества S. Обозначение: $A\subseteq S$.

Выражение $A\subseteq S$ также читают: «A включено в S», «A содержится в S», «S содержит A», «A – часть S». Знак $\subseteq$ называют *символом включения*.

Запишем данное определение символически:

$$A\subseteq S \overset{опр}{\Leftrightarrow} \forall x\,(x\in A \to x\in S).$$

Из определения вытекает: множество A является подмножеством в S тогда и только тогда, когда из предложения $(x\in A)$ следует предложение $(x\in S)$.

Построим отрицание к тому, что $A\subseteq S$. По законам логики имеем:

$$A\not\subseteq S \Leftrightarrow \exists x\,(x\in A \wedge x\notin S).$$

Итак, предложение «Множество A не включено в S» равносильно предложению «Существует элемент множества A, который не лежит в S».

Два множества A и B формально можно соединить знаками включения двумя способами: $A\subseteq B$ и $B\subseteq A$. Каждое из этих выражений определяет предложение, которое может быть истинным или ложным. Второе включение $B\subseteq A$ (также пишут $A\supseteq B$) по отношению к первому называют обратным. Не всегда из справедливости одного из включений следует истинность другого включения.

Пример 6.2.1. Имеет место включение $\{-2;2\}\subseteq\{-2;0;1;2\}$, так как оба числа (-2) и 2 являются элементами множества $\{-2;0;1;2\}$. Однако $\{-2;0;1;2\}$ не включено в $\{-2;2\}$, так как, например, $0\notin\{-2;2\}$. •

Пример 6.2.2. Пусть A – множество всех ромбов, B – множество всех квадратов.

$A\not\subseteq B$, так как существует ромб, не являющийся квадратом.

$B \subseteq A$, так как любой квадрат является ромбом (что вытекает из определений данных фигур).

Другими словами, множество всех квадратов является подмножеством множества всех ромбов. •

Пример 6.2.3. $\{x \mid x \vdots 12\} \subseteq \{x \mid x \vdots 3\}$, так как $x \vdots 12 \Rightarrow x \vdots 3$ (обоснуйте самостоятельно). Однако обратное включение неверно, так как $x \vdots 3 \not\Rightarrow x \vdots 12$ (приведите контрпример). •

Из определения вытекает, что $S \subseteq S$, то есть каждое множество является подмножеством самого себя.

Возьмем вместо A пустое множество. Тогда утверждение $\varnothing \subseteq S$ равносильно $\forall x\ (x \in \varnothing \to x \in S)$. Так как посылка импликации всегда ложна, то для любого объекта x импликация принимает истинное значение. Значит, утверждение $\varnothing \subseteq S$ верно. Итак, пустое множество является подмножеством любого множества.

Вывод: у любого непустого множества всегда есть два подмножества – само множество и пустое. Их называют тривиальными подмножествами. Само множество также называют несобственным подмножеством.

Подмножество в S называется *собственным*, если оно не совпадает с S. Запись $A \subset S$[1] означает, что A является собственным подмножеством в S:

$$A \subset S \overset{опр}{\Leftrightarrow} (A \subseteq S) \wedge (A \neq S).$$

Знак $\subset$ называют *символом строгого включения*.

Мы имеем два отношения: отношение принадлежности элемента множеству (обозначаемое знаком $\in$) и отношение включения множеств (обозначаемое знаком $\subseteq$). В общем случае это разные знаки. Например, $\{2\} \subseteq \{2,3\}$, но $\{2\} \notin \{2,3\}$. Однако иногда между множествами можно поставить оба знака.

Пример 6.2.4. Множество $A = \{2\}$ является элементом множества $B = \{1,2,\{2\}\}$. При этом A есть подмножество множества B, так все элементы множества A лежат в B (в A есть только один элемент – число 2, который лежит в B).

Итак, $\{2\} \in \{1,2,\{2\}\}$ и $\{2\} \subseteq \{1,2,\{2\}\}$. •

[1] В некоторой литературе знаком $\subset$ обозначают произвольное подмножество.

Пример 6.2.5. Рассмотрим плоскость α и прямую l, лежащую на этой плоскости. Если рассматривать прямую как элемент плоскости, то принято писать $l\in\alpha$. Если же понимать прямую как множество точек, принадлежащих данной прямой, то это множество будет подмножеством множества всех точек плоскости. Тогда можно записать $l\subseteq\alpha$. •

Пусть верны прямое и обратное включения $A\subseteq B$ и $B\subseteq A$. В этом случае для всех x выполняются импликации $x\in A \to x\in B$ и $x\in B \to x\in A$, что равносильно тому, что для всех x $x\in A$ тогда и только тогда, когда $x\in B$. Это означает, что множества A и B совпадают:

$$(A\subseteq B) \wedge (B\subseteq A) \Leftrightarrow (A=B).$$

Это простое соображение лежит в основе метода доказательства равенства множеств, называемого *методом двойного включения*: *для того чтобы доказать, что множества A и B равны, надо доказать прямое и обратное включения множеств*.

По сути, эта идея была продемонстрирована в примере 6.1.3, так как прямое включение $A\subseteq B$ означает, что из предиката $P(x)$, задающего множество A, следует предикат $Q(x)$, задающий множество B, а обратное включение означает, что из $Q(x)$ следует $P(x)$. Рассмотрим еще один пример.

Пример 6.2.6. Возьмем множества:

$A = \{2n \mid n\in\mathbf{Z}\}$ – множество всех четных чисел,

$B = \{x \mid x=a+b$, где a и b – нечетные числа$\}$ – множество всех чисел, каждое из которых является суммой некоторых нечетных чисел.

Докажем, что $A=B$.

Покажем справедливость включения $A\subseteq B$. Пусть $x\in A$, тогда имеем $x = 2n = (2n–1)+1$, то есть x представим в виде суммы двух нечетных чисел. Значит, $x\in B$.

Верно также обратное включение $B\subseteq A$. В самом деле, пусть $x\in B$. Тогда $x = (2n+1)+(2k+1) = 2(n+k+1) = 2m$. Значит x – четное число, поэтому $x\in A$.

Оба включения доказаны. Значит, множества A и B равны. •

Упражнение. Докажите, что множества $\{2n–1 \mid n\in\mathbf{Z}\}$ и $\{2n+1 \mid n\in\mathbf{Z}\}$ равны, то есть оба определяют множество нечетных чисел.

Пример 6.2.7. Заметим, что множества $A = \{2n–1 \mid n\in\mathbf{N}\}$ и $B = \{2n+1 \mid n\in\mathbf{N}\}$ не равны, так как $1\in A$, но $1\notin B$. Поэтому множество всех нечетных положительных чисел задает только множество A. При этом включение $A \subseteq B$ верно. •

Пусть дано множество S. Семейство всех подмножеств множества S называется *булеаном множества* S (или *степенью множества* S) и обозначается $\mathbf{B}(S)$ или 2^S.

По определению $\mathbf{B}(S) = \{X \mid X \subseteq S\}$.

Ясно, что $\varnothing \in \mathbf{B}(S)$ и $S \in \mathbf{B}(S)$ для любого множества S.

Пример 6.2.8. Пусть $S = \{1,2,3\}$. Найдем булеан этого множества.

$$\mathbf{B}(\{1,2,3\}) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}. \bullet$$

Заметим, что элементами булеана являются множества.

Термин «степень множества» и соответствующее обозначение мотивируются тем, что если мы имеем конечное n-элементное множество, то число элементов его булеана будет равно степени 2^n. Рассмотренный выше пример иллюстрирует эту зависимость. Доказательство данного факта будет дано в главе 3. Там же будет рассмотрена формула, позволяющая находить у n-элементного множества число подмножеств, содержащих фиксированное число элементов.

6.3. Разбиение множества на классы

Два множества, содержащих одинаковые элементы, называются *пересекающимися*. В этом случае говорят, что множества пересекаются.

Два множества, не имеющих общих элементов, называются *непересекающимися*. В этом случае говорят, что множества не пересекаются.

Пример 6.3.1. Множества $\{1,2,3,4,5\}$, {а,б,в,г,д} не пересекаются.

Непересекающимися являются множество треугольников и множество параллелограммов.

Также не пересекаются множества решений уравнений $x^3=3x^2$ и $x+3=0$. •

Пример 6.3.2. Пусть A – множество треугольников, площадь которых равна 6, B – множество прямоугольных треугольников.

A и B – пересекающиеся множества, так как существует треугольник, являющийся одновременно элементом множеств A и B, например треугольник со сторонами 3, 4, 5. Он прямоугольный и имеет площадь, равную 6 (проверьте эти утверждения). Этот пример не единственен. Приведите пример еще одного такого треугольника.

Пересекаются также множества решений уравнений $x^2+x=0$ и $x^2-x=0$, так как оба эти множества содержат число 0. •

Заметим, термины «множества пересекаются» и «множества не пересекаются» определены для двух множеств. Если множеств будет больше, то необходимы уточнения. Например, множества могут не иметь ни одного общего элемента, но некоторые из множеств могут пересекаться.

Пример 6.3.3. Множества $\{1,2\}$, $\{2,3\}$ и $\{1,3\}$ не пересекаются в совокупности, то есть нет ни одного элемента, который принадлежал бы каждому из множеств. Однако любая пара этих множеств имеет общий элемент. •

Пусть дана совокупность множеств. Говорят, что множества этой совокупности *попарно не пересекаются*, если никакие два (различных) множества совокупности не пересекаются.

Пример 6.3.4. Множества $\{1,2,3\}$, $\{5,7\}$, $\{4,6,8\}$ и $\{9\}$ попарно не пересекаются. •

Два множества могут находиться в следующих отношениях:

1) множества могут быть пересекающимися,

2) множества могут быть непересекающимися,

3) множества могут быть связаны отношением включения.

Ясно, что первые два отношения исключают друг друга, то есть каждое из предложений «Множества пересекаются» и «Множества не пересекаются» является отрицанием другого. Пересекающиеся множества, в частности, могут быть связаны отношением включения. На первый взгляд может показаться, что непересекающиеся множества не могут находиться в отношении включения. Это так, но только с некоторым исключением.

Пример 6.3.5. Рассмотрим два предложения:

P = «Множества A и B пересекаются»,

Q = «Множество A содержится в множестве B».

Ясно, что $P \nRightarrow Q$. Оказывается, обратное утверждение в общем случае тоже неверно, то есть $Q \nRightarrow P$. Контрпример: $A=\varnothing$, B – любое. Как известно, $\varnothing \subseteq B$, но это непересекающиеся множества.

Если же исключить случай пустого множества, то $Q \Rightarrow P$. Действительно, берем любой элемент a из A. Так как $A \subseteq B$, то $a \in B$. Значит, a общий элемент множеств A и B. •

Теперь введем важное понятие разбиения множества на классы.

Пусть дана система K непустых подмножеств некоторого множества S. Говорят, что множества системы K образуют *разбиение множества* S, если выполняются два условия:

1) подмножества попарно не пересекаются;

2) каждый элемент множества S лежит в некотором подмножестве.

Подмножества системы K называются *классами разбиения*. Количество классов может быть любым, в том числе бесконечным.

Вначале ограничимся примерами разбиений на конечное число классов $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Пример 6.3.6. Множества всех четных чисел $\{x \mid x \vdots 2\} = \{2n \mid n \in \mathbf{Z}\}$ и всех нечетных чисел $\{2n+1 \mid n \in \mathbf{Z}\}$ образуют разбиение множества $\mathbf{Z}$ на два класса.

Множество всех простых чисел, множество всех составных чисел и множество $\{1\}$ образуют разбиение множества $\mathbf{N}$ на три класса.

Множество всех положительных чисел, множество всех отрицательных чисел и множество $\{0\}$ разбивают множество $\mathbf{R}$ на три класса •

Пример 6.3.7. Докажем, что множество всех треугольников можно разбить на три класса:

A_1 – множество остроугольных треугольников (треугольник называется остроугольным, если все его углы острые);

A_2 – множество прямоугольных треугольников (треугольник называется прямоугольным, если он имеет прямой угол);

A_3 – множество тупоугольных треугольников (треугольник называется тупоугольным, если он имеет тупой угол).

Действительно, каждый треугольник относится к одному из рассмотренных видов. При этом никакие два класса не пересекаются. A_1 не пересекается ни с каким классом по определению. Покажем отсутствие общих элементов у множеств A_2 и A_3. Предположим, что в треугольнике есть прямой угол и тупой угол. Тогда их сумма будет больше 180 градусов, поэтому сумма всех трех углов треугольника будет больше 180 градусов. А это противоречит теореме о сумме углов треугольника. •

Пример 6.3.8. Разобьем множество всех десятичных цифр $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ на 4 класса. Это можно сделать разными способами.

Первое разбиение: $\{1,2,3\}$, $\{4,5,6\}$, $\{7,8,9\}$, $\{0\}$.

Другое разбиение: $\{0,4,8\}$, $\{1,5,9\}$, $\{2,6\}$, $\{3,7\}$. •

Подсчет числа всех разбиений n-элементного множества на определенное число классов является непростой задачей и решается средствами комбинаторного анализа.

При построении второго разбиения в примере мы использовали следующий принцип: вначале записали все цифры, кратные 4 (это числа вида $4n$), затем все цифры, дающие при делении на 4 остаток 1 (числа вида $4n+1$), далее те цифры, которые дают остаток 2 (числа вида $4n+2$) и, наконец, цифры, дающие остаток 3 (числа вида $4n+3$).

Указанный принцип позволяет разбить на 4 класса все множество целых или натуральных чисел, при этом классы будут являться бесконечными множествами.

Теперь рассмотрим пример разбиения на бесконечное множество классов.

Пример 6.3.9. Возьмем числовую прямую. Тогда целые числа разделят прямую на промежутки. Однако это еще не совсем разбиение, нужны уточнения. Если рассмотреть отрезки, то, например, $[2; 3]$ и $[3; 4]$ будут иметь общий элемент 3. Не включить целые числа означает разбить не все множество **R**. Поэтому отнесем целое число к одному из концов промежутка, например к правому. Получим семейство промежутков вида $(n; n+1]$, n – целое число.

Итак, семейство множеств $K = \{(n; n+1] \mid n \in \mathbf{Z}\}$ образует разбиение множества **R** действительных чисел на классы.

Приведенный пример разбиения множества **R** на бесконечное число классов не единственен. Например, можно считать множество **Z** целых чисел отдельным классом, а все другие классы – это интервалы вида $(n; n+1)$. Есть и другие примеры разбиений. •

Заметим, что любая классификация вещей, процессов или понятий приводит к соответствующим разбиениям.

§ 7. Операции над множествами

7.1. Объединение, пересечение и разность множеств

Операция над множествами – это правило, в результате выполнения которого из данных множеств однозначно получается некоторое новое множество.

Обозначим произвольную операцию знаком $*$. Множество, получаемое из данных множеств A и B, записывают в виде $A*B$. Полученное множество и саму операцию принято называть одним термином.

Замечание. Для основных числовых операций используют два термина: один обозначает саму операцию как действие, другой – число, получаемое после выполнения действия. Например, операция, обозначаемая $+$, называется сложением, а число, полученное в результате сложения, – суммой чисел. Аналогично $\cdot$ – знак операции умножения, а результат $a{\cdot}b$ – произведение чисел a и b. Тем не менее часто эту разницу не учитывают и говорят «Рассмотрим сумму чисел», имея в виду не конкретный результат, а саму операцию.

Операция пересечения. *Пересечением множеств A и B* называется множество, обозначаемое $A\cap B$, состоящее из всех объектов, каждый из которых принадлежит обоим множествам A и B одновременно.

Другими словами, $A\cap B$ – это множество всех x, таких, что $x\in A$ и $x\in B$:

$$A\cap B = \{x \mid x\in A \wedge x\in B\}.$$

Операция объединения. *Объединением множеств A и B* называется множество, обозначаемое $A\cup B$, состоящее из всех объектов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному множеству A или B.

$$A\cup B = \{x \mid x\in A \vee x\in B\}.$$

Операцию объединения иногда обозначают знаком $+$ и называют сложением множеств.

Операция разности. *Разностью множеств A и B* называется множество, обозначаемое $A\backslash B$, состоящее из всех объектов, каждый из которых лежит в A, но не лежит B.

$$A\backslash B = \{x \mid x\in A \wedge x\notin B\}.$$

Выражение $A\cap B$ читают «A в пересечении с B», $A\cup B$ – «A в объединении с B», $A\backslash B$ – «A без B».

Пример 7.1.1. Пусть $A = \{1, 3, 4, 5, 8, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$.

Тогда $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$, $A \cap B = \{4, 8\}$, $A \setminus B = \{1, 3, 5, 9\}$, $B \setminus A = \{2, 6\}$. •

На основе указанных операций можно определить еще две важные операции.

Операция дополнения. Пусть $A \subseteq S$. Тогда разность $S \setminus A$ называется *дополнением множества A до S* и обозначается $\overline{A}_S$.

Пусть любое рассматриваемое множество является подмножеством некоторого множества U. Дополнение до такого фиксированного (в контексте решения той или иной задачи) множества U обозначают просто $\overline{A}$. Также используются обозначения $\mathbf{C}A$, $\mathbf{c}A$, A'.

Пример 7.1.2. Дополнение множества $\{1, 3, 4, 5, 8, 9\}$ до множества всех десятичных цифр равно $\{0, 2, 6, 7\}$.

Дополнение множества $\mathbf{Q}$ до множества $\mathbf{R}$ есть множество $\mathbf{I}$.

Дополнение множества квадратов до множества прямоугольников есть множество всех прямоугольников, имеющих неравные смежные стороны. •

Мы видим, что операции объединения, пересечения и дополнения множеств соответствуют логическим операциям дизъюнкции, конъюнкции и отрицания.

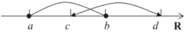
Операция симметрической разности. *Симметрической разностью множеств A и B* называется множество, обозначаемое $A \oplus B$, состоящее из всех объектов, каждый из которых принадлежит в точности одному из множеств A и B:

$$A \oplus B = \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}.$$

Нетрудно видеть, что симметрическая разность есть объединение двух множеств $A \setminus B$ и $B \setminus A$. Это же самое множество можно получить, если вначале объединить множества A и B, а затем убрать из множества общие элементы.

$$A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Пример 7.1.3. Пусть даны действительные числа $a < c < b < d$. Тогда для соответствующих числовых промежутков имеем:



$[a; b] \cup (c; d) = [a; d)$,
$[a; b] \cap (c; d) = (c; b]$,
$[a; b] \setminus (c; d) = [a; c]$,
$[a; b] \oplus (c; d) = [a; c] \cup (b; d)$,
$\mathbf{R} \setminus [a; b] = (-\infty; a) \cup (b; \infty)$, $\mathbf{R} \setminus [c; d] = (-\infty; c] \cup [d; \infty)$.

Заметим, что так как отрезок $[a; b]$ содержит число c, а интервал $(c; d)$ точку c не содержит, то число c лежит в разности $[a; b]$ без $[c; d]$. А вот разность, например, $(2;5)\backslash[3;7]$, число 3 не содержит, так как оно лежит в отрезке $[3;7]$. Имеем $(2;5)\backslash[3;7]=(2;3)$. •

Пусть даны непересекающиеся множества A и B. Поскольку $\cap$ – знак операции пересечения, то запись $A \not\cap B$ некорректна. Неправильно также говорить, что у множеств нет пересечения. Пересечение есть всегда, оно определено для любых множеств. То, что множества не пересекаются, означает, что их пересечение пусто (то есть, выполнив указанную операцию, мы получаем пустое множество). Если же множества пересекаются, значит, их пересечение не пусто. Делаем вывод:

$$«A \text{ и } B \text{ не пересекаются»} \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing,$$

$$«A \text{ и } B \text{ пересекаются»} \Leftrightarrow A \cap B \neq \varnothing.$$

Обобщим операции объединения пересечения на случай, когда множеств более двух.

Пусть дана система K множеств. Пересечением множеств данной системы называется множество всех элементов, каждый из которых лежит во всех множествах их K.

Объединением множеств данной системы называется множество всех элементов, каждый из которых лежит хотя бы в одном множестве их K.

Пусть множества системы K занумерованы элементами какого-то семейства индексов I. Тогда любое множество из K можно обозначить A_i, где $i \in I$. Если совокупность конечная, то в качестве I используют множество первых натуральных чисел $\{1,2,\ldots,n\}$. В общем случае I может быть бесконечным.

Тогда в общем случае объединение множеств A_{i} для всех $i \in I$ обозначают $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$, а пересечение – $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$.

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I \, (x \in A_i)\}, \quad \bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I \, (x \in A_i)\}.$$

Пусть совокупность K конечная, тогда $K = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. В этом случае пишут $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ и $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$.

Пример 7.1.4. Рассмотрим промежутки числовой прямой $A_1 = [-\infty; 2]$, $A_2 = (-\infty; 3]$, $A_3 = [1; 4)$, $A_4 = (0; 2)$. Тогда их объединение равно множеству $(-\infty;4)$, а пересечение есть множество $[1; 2)$. Убедитесь в этом самостоятельно, изобразив множества на числовой прямой. •

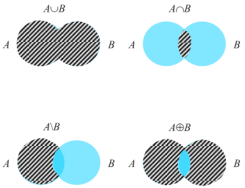
Используя понятие объединения произвольной совокупности множеств, можно сформулировать понятие разбиения множества на классы, определенное в пункте 6.3.

Разбиение множества S – это система непустых попарно непересекающихся подмножеств, объединение которых совпадает с S.

7.2. Диаграммы Эйлера–Венна

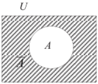
Для наглядного представления множеств и операций над ними используются *диаграммы Эйлера–Венна*[2]. При этом множество изображается частью плоскости, ограниченной замкнутой кривой; элементами множества служат точки (не обязательно все, как, например, в случае конечных множеств) плоскости, находящиеся внутри замкнутого контура. Исходные множества часто изображаются кругами. Единственный минус такого способа изображений – нельзя изобразить пустое множество.

Посредством диаграмм Эйлера–Венна изобразим объединение, пересечение, разность и симметрическую разность множеств (образованные множества обозначены штриховкой).



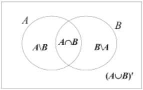
[2] Леонард Эйлер (1707–1783) – крупнейший математик-энциклопедист XVIII в., швейцарец, долгие годы работавший в России, использовал круговые иллюстрации (круги Эйлера). Джон Венн (1834–1923) – английский математик и логик, предложил графический способ изображения формул математической логики.

Изобразим штриховкой дополнение множества A до U. Обозначим множество U в виде прямоугольника. Так как все объекты множества A являются элементами множества U, то множество A рисуется внутри прямоугольника.



Заметим, что множество A (при условии, что оно не пустое и не совпадает с U) и его дополнение разбивают U на два класса.

В общем случае два множества A и B порождают разбиение множества, содержащего A и B, максимум на 4 класса. Классов может получиться меньше, если какие-то из подмножеств будут пустыми.



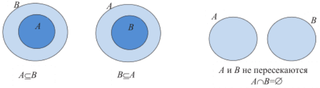
Когда рассматривают произвольные множества, их рисуют в общем случае именно так, как показано на рисунках. Такой способ учитывает все возможности: у множеств A и B могут быть общие элементы (лежащие в $A \cap B$), могут быть элементы, лежащие только в A (то есть в разности $A \backslash B$), а также элементы, лежащие только в B (то есть в $B \backslash A$). Однако некоторые из указанных множеств могут быть пустыми.

Если же известно, что множества не пересекаются, то их изображают непересекающимися кругами, то есть кругами без общих точек.

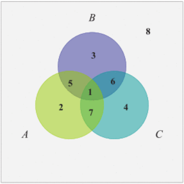
Предположим, что разность $A \backslash B$ пуста, то есть нет элементов, лежащих в A, но не B. Другими словами, все элементы, лежащие в A, лежат в B. Но это значит, что A содержится в B. В этом случае круг A изображают внутри круга B.

Если же разность $B \backslash A$ будет пуста, значит, множество B содержится в A.

Описанные отношения между множествами проиллюстрированы ниже на рисунках.



Три множества A, B и C порождают разбиение множества U, где $A,B,C \subseteq U$, уже максимум на 8 классов. Приведем иллюстрацию на диаграммах Эйлера–Венна. Классы разбиения на рисунках обозначены числами.



Упражнение. Выразите классы разбиения через множества A, B и C с помощью операций.

Пусть S – произвольное множество. Все рассмотренные выше операции определены на булеане $\mathbf{B}(S)$, то есть, взяв произвольные подмножества из S и выполнив любую из операций, снова получим множество, содержащееся в S.

Кроме этих операций ниже будет рассмотрена еще одна операция над множествами, отличающаяся от предыдущих тем, что позволяет получать множества с «новыми» элементами. Этими «новыми» элементами являются упорядоченные n-ки.

7.3. Понятие упорядоченной *n*-ки

Упорядоченной парой, обозначаемой (a,b) или $\langle a,b \rangle$, называется набор двух не обязательно различных объектов, записанных в указанном порядке, при этом равенство пар $(a,b)=(c,d)$ означает, что $a=b$, $c=d$.

Иногда вместо слов «упорядоченная пара» говорят просто «пара», когда это не ведет к путанице. Первый элемент пары называется первой координатой, второй элемент – второй координатой.

Упорядоченная пара (a,b) и двухэлементное множество $\{a,b\}$ – разные объекты. Во-первых, двухэлементное множество содержит два различных элемента, а элементы пары могут совпадать. Во-вторых, $\{a,b\}=\{b,a\}$, но $(a,b)=(b,a)$ только тогда, когда $a=b$.

Пример 7.3.1. Дано уравнение $x^2+y=6$. Каждое из решений этого уравнения является упорядоченной парой чисел (x_0,y_0), при подстановке которых вместо соответствующих переменных получается истинное равенство.

Перечислим некоторые его решения: (1;5), (–1;5), (2;2), (0;6), (3;–3), (0,5;5,75) и другие. Заметим, что пара (5;1) не является решением.

Множество всех решений уравнения может быть задано так:

$S=\{(x,y) \mid x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}, x^2+y=6\}$ или, учитывая, что $y=6-x^2$,

$S=\{(x, 6-x^2) \mid x\in\mathbf{R}\}$.

Множество решений бесконечно, так как для каждого x существует пара $(x, 6-x^2)$, при этом различным значениям x соответствуют различные пары. •

Упорядоченную пару действительных чисел можно отождествить с точкой на координатной плоскости. В этом случае множество решений уравнений с двумя переменными можно мыслить как множество точек такой плоскости. В примере 7.3.1 множество решений представляет собой параболу, являющуюся графиком функции $y=6-x^2$. Постройте эту параболу.

Пусть a и b – элементы каких-то множеств, возможно различных. Упорядоченная пара (a,b) моделирует соответствие элемента a элементу b. Эта идея позволяет математически уточнить понятие функции и в общем случае определить понятие отношения между множествами.

Теперь обобщим понятие упорядоченной пары.

Упорядоченной n-ой, обозначаемой $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ или $\langle a_1,a_2,...,a_n \rangle$, называется набор, составленный из n объектов, записанных в указанном порядке. При этом $(a_1,a_2,\ldots,a_n)=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ означает $a_1=b_1$, $a_2=b_2$, …, $a_n=b_n$.

Если n=3, то говорят «упорядоченная тройка», если n=4, – «упорядоченная четверка» и т. д.

Кроме термина «упорядоченная n-ка» используются другие. Приведем наиболее употребительные из них: «кортеж длины n», «n-мерный вектор», «линейный массив из n элементов».

Так же как в случае упорядоченной пары, элементы n-ки называются ее координатами. Равенство n-ок означает равенство их соответствующих координат. Кортежи разной длины не могут совпадать.

Пример 7.3.2. Дано уравнение с тремя переменными $x+y+z=5$.

Зададим множество A всех решений этого уравнения и множество B его натуральных решений.

$A = \{(x,y,z) \mid x,y,z\in\mathbf{R},\ x+y+z=5\} = \{(x,y,5-x-y) \mid x,y\in\mathbf{R}\}$.

Множество A бесконечно и задает в трехмерном геометрическом пространстве плоскость.

Множество B его натуральных решений $\{(x,y,z) \mid x,y,z\in\mathbf{N},\ z=5-x-y\}$ конечно, так как конечно количество натуральных значений переменных x и y, при которых переменная z принимает также натуральное значение. Перечислим все элементы множества B:

$$B = \{(1,1,3),\ (1,2,2),\ (1,3,1),\ (2,1,2),\ (2,2,1),\ (3,1,1)\}.\ \bullet$$

7.4. Прямое произведение множеств

Рассмотрим еще одну операцию над множествами.

Прямым (или *декартовым*[3]) *произведением множеств* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется множество

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1\times A_2\times\ldots\times A_n = \{(a_1,a_2,\ldots,a_n) \mid a_i\in A_i\}$$

всех упорядоченных n-ок, i-я координата которых лежит в множестве A_i.

В частности, можно образовать прямое произведение двух множеств $A\times B = \{(a, b) \mid a\in A \wedge b\in B\}$.

Пример 7.4.1. Если A = {а, б, в} и $B = \{1, 2\}$, то

$A\times B$ = {(а,1), (а,2), (б,1), (б,2), (в,1), (в,2)},

$B\times A$ = {(1,а), (1,б), (1,в), (2,а), (2,б), (2,в)},

$A\times A$ = {(а,а), (а,б), (а,в), (б,а), (б,б), (б,в), (в,а), (в,б), (в,в)}.

---

[3] По имени французского ученого Рене Декарта (1596–1650).

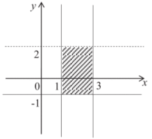
$B \times B \times A = \{(1,1,а),\ (1,1,б),\ (1,1,в),\ (1,2,а),\ (1,2,б),\ (1,2,в),\ (2,1,а),\ (2,1,б),\ (2,1,в),\ (2,2,а),\ (2,2,б),\ (2,2,в)\}$.

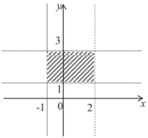
Прямое произведение $A \times A$ обозначают A^2 и называют декартовым квадратом. В общем случае прямое произведение n множеств, равных A, обозначают A^n и называют *n-й степенью множества A*.

Пример 7.4.2. Запишем прямое произведение числовых промежутков:

$$[1;3] \times [-1;2) = \{(x, y) \mid 1 \le x \le 3 \wedge -1 \le y < 2\}.$$

Графически это множество изображается в виде прямоугольника на координатной плоскости, ограниченного прямыми $x=1$, $x=3$ и $y=-1$, $y=2$, причем верхняя сторона прямоугольника не входит в данное множество. Изобразим множества $[1; 3] \times [-1; 2)$ и $[-1; 2) \times [1; 3]$:





Множество всех пар действительных чисел $\mathbf{R}^2$ тогда можно отождествить с координатной плоскостью, а $\mathbf{R}^3$ – с трехмерным координатным пространством.

$[0; 1]^2$ есть единичный квадрат в множестве $\mathbf{R}^2$, а $[0; 1]^3$ – единичный куб в пространстве $\mathbf{R}^3$. Изобразите графически эти множества. •

Упражнение. Изобразите на координатной плоскости прямые произведения множеств $A \times B$ и $A \times A$, если а) $A = [1; 3]$, $B = \{2,3\}$, б) $A = [1; 3] \cup [4; 6]$, $B = \mathbf{R}$.

Заметим, что далеко не любая фигура на плоскости является прямым произведением некоторых множеств.

Пример 7.4.3. Докажем, что множество $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$ не является прямым произведением никаких множеств.

На плоскости множество S определяет окружность с центром в точке (0;0) радиуса 1.

Предположим противное. Пусть найдутся множества A и B, такие, что $A\times B = S$. Возьмем точку (1;0), которая лежит на окружности, то есть принадлежит S. Тогда $(1;0)\in A\times B$, поэтому $1\in A$, $0\in B$. Затем возьмем точку (0;1), которая снова лежит в S, значит, лежит в $A\times B$. Поэтому $0\in A$, $1\in B$.

Прямому произведению $A\times B$ принадлежат все пары, первая координата которых лежит в A, а вторая – в B. Так как числа 0, 1 лежат и в A, и в B, то в $S = A\times B$ лежат точки (0;0), (0;1), (1;0), (1;1). Первые три точки действительно лежат в S, а точка (1;1) множеству S не принадлежит. Противоречие. •

Пусть имеется предложение, зависящее от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые принимают значения из множеств A_1, A_2, …, A_n соответственно. Напомним, что такое предложение обозначают $P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и называют n-местным предикатом. Однако этот предикат можно обозначать $P(x)$, договорившись, что переменная x принимает значения из множества M, являющегося прямым произведением $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$.

7.5. Свойства операций

Приведем тождества, выражающие основные свойства операций над множествами. Свойства объединения, пересечения и дополнения над множествами аналогичны свойствам дизъюнкции, конъюнкции и отрицания над предложениями, рассмотренным в главе 1.

Свойства операций объединения и пересечения

Данные операции коммутативны, ассоциативны и связаны дистрибутивными законами, что отражено в первых трех свойствах.

1° $A\cap B = B\cap A$, $A\cup B = B\cup A$.

2°. $(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C) = A\cap B\cap C$, $(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C) = A\cup B\cup C$.

При выполнении только операции пересечения или только операции объединения скобки можно совсем не ставить. Однако если выражение содержит разные операции, то скобки необходимы.

3°. $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$, $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$.

4°. $A\cap A = A$, $A\cup A = A$ – идемпотентность операций.

5°. $A\cap(A\cup B) = A$, $A\cup(A\cap B) = A$ – законы поглощения.

6°. $A\cup U = U$, $A\cap U = A$, $A\cup\varnothing = A$, $A\cap\varnothing = \varnothing$.

Свойства дополнения

7°. $\overline{\overline{A}} = A$ – закон двойного дополнения.

8°. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ – законы де Моргана.

9°. $A \cup \overline{A} = U$, $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

Представление разности через пересечение и дополнение

10°. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Для того чтобы доказать равенство множеств P и T, надо показать, что объект a лежит в P тогда и только тогда, когда a лежит в T. Поэтому основной способ доказательства указанных равенств опирается на определения операций над множествами и логические законы. Такой подход называют *поэлементным доказательством*. Доказательство можно разбить на два этапа: вначале доказать включение $P \subseteq T$, затем включение $T \subseteq P$ (метод двойного включения).

Пример 7.5.1. Докажем дистрибутивный закон

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Рассуждения оформим в виде цепочки равносильных преобразований:

$$x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B \cup C) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \in B)) \text{ или } ((x \in A) \wedge (x \in C)) \Leftrightarrow (x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C). \bullet$$

Обосновать равенство множеств можно с помощью диаграмм Эйлера–Венна. Для этого нужно в общем случае изобразить два или три множества, учитывая, что у любой пары множеств могут быть общие элементы. Последовательно выполняя операции, вначале изображают множество, записанное в одной части равенства, затем множество, записанное в другой части равенства. Полученные множества сравнивают. Если они состоят из одних и тех же частей, значит, множества равны. Для наглядности можно использовать такие приемы: закрашивать получаемые множества в разные цвета, накладывать одно множество на другое, рисовать множества на разных картинках и т. п.

Правильнее было бы называть такие рассуждения иллюстрациями. Тем не менее после определенной тренировки они позволяют достаточно быстро проверить любое равенство, содержащее не более трех множеств. Если множеств будет больше, то появляется трудность в «хорошем» изображении четвертого множества в общем виде.

Используя сформулированные свойства операций, можно доказывать тождественную истинность других равенств. Для этого используют важнейшее свойство равенства – *свойство подстановки: во всяком выражении-терме любые входящие в него множества можно заменять на равные им множества*.

Операция разности множеств, в отличие от операций объединения и пересечения, не обладает ни коммутативным, ни ассоциативным свойством. Однако на основании свойства 10° разность легко выражается через другие операции.

Пример 7.5.2. Докажем равенства

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \text{ и } \overline{A \setminus B} \cap A = A \cap B.$$

Выполним тождественные преобразования для первого равенства:

$$A \setminus (B \cap C) = A \cap \left(\overline{B \cap C}\right) = A \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C}) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Были последовательно применены свойства 10°, 8°, 3°, 10°.

Теперь докажем второе равенство:

$$\overline{(A \setminus B)} \cap A = \overline{(A \cap \overline{B})} \cap A = (\overline{A} \cup \overline{\overline{B}}) \cap A = (\overline{A} \cup B) \cap A =$$
$$= (\overline{A} \cap A) \cup (A \cap B) = \varnothing \cup (A \cap B) = A \cap B.$$

Для каждого равенства цепочки преобразований самостоятельно укажите свойства, которые были использованы. •

Пример 7.5.3. На диаграммах Эйлера–Венна два множества A и B порождают разбиение универсального множества на четыре попарно непересекающиеся части. На основе свойств 8° и 10° каждую из них можно выразить через множества A и B только с помощью операций пересечения и дополнения. Вот эти множества:

$$A \cap B,\ A \cap \overline{B},\ \overline{A} \cap B,\ \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Заметим, что некоторые из этих множеств могут быть пустыми. Поэтому, строго говоря, классов разбиений будет не более четырех. •

Аналогичным образом можно выразить все 8 попарно непересекающихся множеств, которые получаются исходя из трех произвольных подмножеств A, B, C универсального множества. Для наглядности вначале уместно изобразить множества на диаграммах Эйлера-Венна. Выполните эту процедуру в качестве упражнения.

Перейдем к операции прямого произведения двух множеств. Эта операция не коммутативна и не ассоциативна.

Пример 7.5.4. Докажем, что операция прямого произведения не ассоциативна.

Запишем формально ассоциативный закон $(A\times B)\times C = A\times(B\times C)$. Приведем контрпример: $A=\{1\}$, $B=\{2\}$, $C=\{3\}$.

Тогда $A\times B=\{(1; 2)\}$, $(A\times B)\times C=\{((1; 2); 3)\}$.

При этом $B\times C=\{(2; 3)\}$, $A\times(B\times C)=\{(1; (2; 3))\}$.

Мы получили два одноэлементных множества, содержащих разные элементы. Элемент $(1; (2; 3))$ – это пара, первая координата которой равна 1, а элемент $((1; 2); 3)$ – это пара, первая координата которой является парой $(1 ;2)$. Итак, имеем различные множества, стоящие в левой и правой части исходного равенства. •

Операция прямого произведения двух множеств дистрибутивна относительно операций объединения, пересечения и разности множеств:

$A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$,

$A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$,

$A\times(B\setminus C) = (A\setminus B)\cap(A\setminus C)$.

Докажите эти равенства самостоятельно.

§ 8. Бинарные отношения

Понятие отношения наряду с понятием множества «пронизывает» всю математику. Интуитивно отношение понимается как связь объектов. Наша задача заключается в том, чтобы, используя сформулированные выше конструкции теории множеств, определить на математическом языке, что же понимается в математике под термином «отношение».

8.1. Бинарные отношения на множестве

Пусть дано множество A. Связь элементов x и y множества A моделируется парой (x,y). Если элемент x связан с y, значит, мы имеем пару (x,y) в качестве элемента некоторого множества; если x не связан с y, значит, пара (x,y) не является объектом множества. Итак, имеем следующее определение.

Бинарным отношением на множестве A называется произвольное множество пар элементов из A.

Другими словами, бинарное отношение на множестве A – это подмножество прямого произведения $A\times A=A^2$. В частности, само множество A^2 всех пар является бинарным отношением.

По аналогии с бинарным (или двуместным) отношением можно рассматривать *n-местное отношение* на множестве как подмножество прямого произведения A^n. Мы в основном будем рассматривать бинарные отношения, но для краткости речи говорить просто: «отношение на множестве A».

Обозначим произвольное бинарное отношение греческой буквой ρ.

Если $(x,y)\in\rho$, то говорят, что x находится в отношении ρ с y, и пишут $x\rho y$.

Если $(x,y)\notin\rho$, то имеем отрицание соответствующего утверждения. В этом случае наряду с записью $\rceil(x\rho y)$ (или $\overline{x\rho y}$) пишут $x\not\rho y$, перечеркивая знак отношения.

Пример 8.1.1. Рассмотрим множество $A = \{1,2,3,4,5\}$. Множество пар

$$\{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5), (4,5)\}$$

определяет на A отношение «меньше», обозначаемое знаком $<$.

На этом же множестве можно рассмотреть другое множество пар

$$\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)\},$$

оно определяет отношение равенства. •

Пример 8.1.2. Рассмотрим множество $\{\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{I}, \mathbf{R}\}$ основных числовых множеств и множество пар

$$\{(\mathbf{N}, \mathbf{Z}), (\mathbf{N}, \mathbf{Q}), (\mathbf{N}, \mathbf{R}), (\mathbf{Z}, \mathbf{Q}), (\mathbf{Z}, \mathbf{R}), (\mathbf{Q}, \mathbf{R}), (\mathbf{I}, \mathbf{R})\}.$$

Имеем отношение, определенное нами в пункте 2.2 как отношение строгого включения множеств. Заметим, что, например, пара $(\mathbf{Q}, \mathbf{I})$ не лежит в указанном множестве, так как $\mathbf{Q}\not\subset\mathbf{I}$, более того, эти множества не пересекаются. •

Пример 8.1.3. Дано множество слов A={ток, кот, шок, кол, лак}. Рассмотрим такое отношение:

$$\rho = \{(\text{ток, шок}), (\text{шок, ток}), (\text{шок, кол}), (\text{кол, шок}), (\text{кол, лак}), (\text{лак, кол}), (\text{кот, кол}), (\text{кол, кот})\}.$$

Это отношение можно выразить таким образом: слова множества A находятся в отношении ρ тогда и только тогда, когда они имеют ровно две одинаковые буквы. •

Заметим, что любое множество пар является отношением, неважно, имеется ли для этого отношения хорошее словесное описание.

Так как отношение является множеством, то его можно задать характеристическим свойством, то есть предикатом $P(x,y)$: $\rho = \{(x,y)\in A^2 \mid P(x,y)\}$. Также используется запись:

$$x\rho y \;\Leftrightarrow\; P(x,y).$$

Читают: «x находится в отношении с y тогда и только тогда, когда истинно $P(x,y)$».

Пример 8.1.4. Определим на множестве $A = \{1,2,3,4,5\}$ отношение:

$$x\rho y \;\Leftrightarrow\; \text{«Число } x \text{ на 2 меньше } y\text{».}$$

Здесь $P(x,y) = (x+2=y)$. Зададим это отношение перечислением пар:

$$\{(1,3), (2,4), (3,5)\}. \bullet$$

Пример 8.1.5. Зададим на множестве $\mathbf{Z}$ (или на множестве $\mathbf{N}$) отношение с помощью предложения: «Существует целое число n, такое, что $x=n\cdot y$». Символически можно записать:

$$x\rho y \;\Leftrightarrow\; \exists n\in\mathbf{Z}(x=n\cdot y).$$

Имеем уже определенное ранее отношение делимости, обозначаемое знаком $\vdots$. Этому отношению принадлежат такие пары, как (6,2), (6,3), (4,4), (111, –37) и другие. В отличие от предыдущих примеров это множество пар бесконечно, и перечислить все пары не удастся. •

Рассмотрим важнейшие свойства, которыми могут обладать бинарные отношения на множестве.

Отношение ρ на множестве A называется *рефлексивным*, если любой элемент x из A находится в отношении ρ сам с собой, то есть для всех x из A выполняется $x\rho x$:

$$\rho \text{ рефлексивно } \overset{опр}{\Leftrightarrow} \;\forall x\in A(x\rho x).$$

Пример 8.1.6. Рассмотрим отношение делимости на множестве $\mathbf{Z}$. Возьмем произвольное целое число x. Так как $x=x\cdot 1$, то $x\,\vdots\, x$. Значит, любое целое число делится на само себя: $\forall x\in\mathbf{Z}\,(x\,\vdots\, x)$. Поэтому отношение делимости рефлексивно.

Так как любое множество является подмножеством самого себя, то отношение включения множеств рефлексивно (на любой совокупности множеств). •

Отношение ρ на множестве A называется *антирефлексивным*, если ни один элемент множества A не находится в отношении ρ с самим собой:

$$\rho \text{ антирефлексивно } \overset{\text{опр}}{\Leftrightarrow} \ \forall x{\in}A \ \rceil(x\rho x).$$

Пример 8.1.7. Отношение «меньше» на множестве **R** антирефлексивно, так как никакое число не меньше самого себя. •

Построим отрицание к предложению «Отношение ρ рефлексивно»:

$$\rceil(\forall x{\in}A(x\rho x)) \equiv \exists x{\in}A \ \rceil(x\rho x).$$

Таким образом, отношение ρ не является рефлексивным тогда и только тогда, когда существует элемент $x{\in}A$, который не находится в отношении ρ сам с собой. Отношение, не являющееся рефлексивным, не обязано быть антирефлексивным.

Пример 8.1.8. Рассмотрим отношение на множестве **R**, заданное предложением «Число x противоположно числу y». Число x называется противоположным числу y, если сумма $x{+}y$ равна 0.

Это отношение не рефлексивно. Контрпример: $x{=}1$. Так как $1{+}1{\neq}0$, то число 1 не противоположно 1.

Это отношение не антирефлексивно. Контрпример: $x{=}0$. Так как $0{+}0{=}0$, то число 0 противоположно 0. •

Отношение ρ на множестве A называется *симметричным*, если из того, что x находится в отношении ρ с y, следует, что y находится в отношении ρ с x:

$$\rho \text{ симметрично } \overset{\text{опр}}{\Leftrightarrow} \ \forall x,y{\in}A \ (x\rho y \to y\rho x).$$

Пример 8.1.9. Из тождества $x{+}y = y{+}x$ вытекает утверждение: для любых действительных чисел x и y если x противоположно y, то y противоположно x. Значит, данное отношение симметрично. Часто говорят просто: «Числа x и y противоположны».

Отношение «Число x меньше числа y» на множестве **R** не является симметричным: 3 меньше 4, но 4 не меньше 3. •

Отношение ρ на множестве A называется *антисимметричным*, если ни для каких различных элементов x и y из A, таких, что $x\rho y$, не выполняется $y\rho x$:

$$\rho \text{ антисимметрично } \overset{\text{опр}}{\Leftrightarrow} \ \forall x,y{\in}A \ (x{\neq}y \wedge x\rho y \to \rceil(y\rho x)).$$

Пример 8.1.10. Отношение «меньше» на множестве **R** антисимметрично. •

Определение антисимметричного отношения можно сформулировать другими способами. Введем обозначения:

$$P = (x=y),\ \ M = (x\rho y),\ \ K = (y\rho x).$$

Используя таблицу истинности, можно доказать, что формула $\rceil P \wedge M \to \rceil K$ равносильна формуле $M \wedge K \to P$, которая, в свою очередь, по правилу контрапозиции равносильна $\rceil P \to \rceil(M \wedge K)$. На основании этого можно сказать, что отношение ρ является антисимметричным тогда и только тогда, когда выполняется одно из равносильных условий:

А) Из того, что $x\rho y$ и $y\rho x$, следует $x=y$:

$$\forall x,y\in A\ (x\rho y \wedge y\rho x \to x=y).$$

Б) Никакие различные элементы не могут одновременно находиться в отношении ρ друг с другом.

Пример 8.1.11. Рассмотрим отношение включения на произвольном семействе множеств. Так как $X\subseteq Y \wedge Y\subseteq X \Rightarrow X=Y$, то включение $\subseteq$ есть антисимметричное отношение. •

Пример 8.1.12. Отношение делимости на множестве **Z** не является ни симметричным, ни антисимметричным. Так как $4\vdots 2$, но $2\not\vdots 4$, то отношение не симметрично. Так как $2\vdots(-2)$ и $(-2)\vdots 2$, но $(-2)\neq 2$, то отношение не является антисимметричным.

Однако на множестве **N** натуральных чисел имеем антисимметричное отношение: $\forall x,y\in\mathbf{N}\ (x\vdots y \wedge y\vdots x \to x=y)$. Проверьте это утверждение, пользуясь определением делимости. •

Отношение ρ на множестве A называется *транзитивным*, если из того, что x находится в отношении ρ с y, а y находится в отношении ρ с z, следует, что x находится в отношении ρ с z:

$$\rho \text{ транзитивно } \overset{опр}{\Leftrightarrow}\ \ \forall x,y,z\in A\ (x\rho y \wedge y\rho z \to x\rho z).$$

Пример 8.1.13. Отношение делимости транзитивно (и на множестве **Z** и на множестве **N**): $x\vdots y \wedge y\vdots z \Rightarrow x\vdots z$. Покажем это. Пусть $x\vdots y$ и $y\vdots z$. Тогда $x=ny$ и $y=kz$ для некоторых целых чисел n и k. Тогда $x = n(kz) = (nk)z = mz$, где m есть целое число. Поэтому $x\vdots z$.

Отношение включения множеств также транзитивно: $X \subseteq Y \wedge Y \subseteq Z \Rightarrow X \subseteq Z$. Докажите.

Отношение «Числа x и y противоположны» не является транзитивным. Контрпример: $x=2$, $y=-2$, $z=2$. Тогда числа 2 и (–2) противоположны, а также (–2) и 2 противоположны. Но числа $x=2$ и $z=2$ не являются противоположными. •

Пример 8.1.14. Рассмотрим некоторые примеры отношений из предыдущего пункта.

Отношение из примера 8.1.3 антирефлексивно и симметрично. Отношение из примера 8.1.4 антирефлексивно и антисимметрично. Ни одно из этих отношений не транзитивно. Докажите это, рассмотрев соответствующие контрпримеры. •

Некоторым отношениям, обладающим одновременно рядом свойств, даны общие называния. Из рассмотренных выше примеров одновременно свойствами рефлексивности, антисимметричности и транзитивности обладают отношение включения множеств $\subseteq$ и отношение делимости на множестве **N**. Также этими тремя свойствами обладает отношение «x меньше либо равно y», определенное на множестве **R** (или на любом его подмножестве):

$\forall x \in \mathbf{R}\ (x \leq x)$;

$\forall x,y \in \mathbf{R}\ (x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x=y)$;

$\forall x,y,z \in \mathbf{R}\ (x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z)$.

Рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение называется *отношением порядка*.

Множество A, на котором задано отношение порядка ρ, называется *упорядоченным множеством*. Пишут $\langle A, \rho \rangle$.

В настоящее время теория упорядоченных множеств – это большой раздел математики, которому посвящены целые книги. Мы отметим лишь ряд особенностей понятия «упорядоченное множество».

Интуитивно слова «упорядоченное множество» часто понимаются в более узком смысле. Рассмотрим упорядоченную n-ку, составленную из попарно различных элементов. Например, пятерка букв (Ш,К,О,Л,А) определяет слово ШКОЛА. В этом случае слова «элементы записаны в определенном порядке» понимаются в том смысле, что мы занумеровали их натуральными числами 1, 2, 3, 4, 5 и расположили в порядке возрастания номеров. Обобщим этот пример.

Пусть дано n-элементное множество A. Занумеровав каким-то образом его элементы $a_1, a_2, \ldots, a_n$, мы действительно получим упорядоченное множество, определив отношение порядка следующим образом:

$$a_i \rho a_j \Leftrightarrow i \le j.$$

Соотношение понимается так: то, что элемент x связан с другим элементом y, означает, что x записан в кортеже левее y.

Пример 8.1.15. Дано множество A={а,б,в,г}. Упорядоченная четверка его различных элементов (б,в,а,г) задает такое отношение порядка:

{(б,б), (б,в), (б,а), (б,г), (в,в), (в,а), (в,г), (а,а), (а,г), (г,г)}. •

Заметим, что порядок не обязан обладать так называемым свойством линейности.

Пример 8.1.16. Рассмотрим на множестве $A = \{2,4,6,8\}$ отношение делимости $\vdots$. Задайте это отношение множеством пар. Так как в A лежат только натуральные числа, то $\vdots$ – отношение порядка. Имеем упорядоченное множество $\langle A, \vdots\rangle$.

Такой порядок нельзя представить в виде упорядоченной четверки следующих друг за другом элементов. Можно привести графическую иллюстрацию отношения с помощью точек и стрелок: из точки x в точку y ведет стрелка тогда и только тогда, когда $x \vdots y$.

Рассмотрим числа 6 и 4. Ни одно из них не делится на другое. Говорят, что это несравнимые элементы. •

Пусть на множестве A задано отношение порядка ρ. Элементы x и y называются *сравнимыми*, если выполняется хотя бы одно из двух соотношений – $x\rho y$ или $y\rho x$.

Порядок ρ на множестве A называется *линейным*, если любые два элемента множества A сравнимы. Множество, на котором определен линейный порядок, называется *линейно упорядоченным* (или *цепью*).

Пример 8.1.17. Отношение $\le$ на множестве $\mathbf{R}$ является линейным порядком, так как $\forall x,y \in \mathbf{R}\ (x \le y \vee y \le x)$. Поэтому $\langle \mathbf{R}, \le\rangle$ – линейно упорядоченное множество.

Отношение делимости натуральных чисел в общем случае не является линейным порядком. Контрпример дан в примере 8.1.16.•

Отметим, что любой линейный порядок на конечном множестве задается нумерацией его элементов. Чтобы подчеркнуть, что порядок может быть не линейным, упорядоченное множество в общем случае иногда называют частично упорядоченным.

8.2. Отношение эквивалентности

Рассмотрим еще один важный вид отношения, которое используется в математике для построения новых множеств.

Определение. Рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение называется *отношением эквивалентности*.

Пример 8.2.1. Рассмотрим множество A точек плоскости. Пусть O – некоторая фиксированная точка. Определим отношение ρ: $X\rho Y \Leftrightarrow$ «Точки X и Y равноудалены от точки O». Нетрудно проверить, что отношение ρ рефлексивно, симметрично и транзитивно (убедитесь в этом). Итак, ρ есть отношение эквивалентности. •

Введем понятие класса эквивалентности.

Пусть на множестве A задано отношение эквивалентности ρ. *Класс эквивалентности, порожденный элементом* a, – это множество всех элементов x из A, таких, что x находится в отношении ρ с элементом a.

Класс эквивалентности обозначают по-разному, например $[a]_\rho$, или $\rho(a)$. Также для краткости используют обозначение $\widetilde{a}$. Часто произвольное отношение эквивалентности обозначают символом ~.

Вернемся к примеру 8.2.1. Возьмем произвольную точку M на плоскости. Тогда класс эквивалентности, порожденный точкой M, – это множество всех точек плоскости X, таких, что $OX=OM$. Имеем окружность с центром O радиуса OM. Любая другая точка этой окружности порождает тот же самый класс эквивалентности. Чтобы получить другой класс эквивалентности, нужно взять точку M_1, такую, что $OM \neq OM_1$. Класс эквивалентности, порожденный точкой M_1, – это окружность с центром O радиуса OM_1.

Пример 8.2.2. Рассмотрим отношение ρ на множестве $A = \{2, 3, 4, 5\}$, заданное перечислением пар:

$$\rho = \{(2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (3,4), (3,5), (4,3), (4,5), (5,4), (5,3)\}.$$

Нетрудно видеть, что ρ – отношение эквивалентности.

Тогда $\widetilde{3} = \{3,4,5\}$, аналогично, $\widetilde{4} = \{3,4,5\}$ и $\widetilde{5} = \{3,4,5\}$. Класс $\widetilde{2} = \{2\}$ есть одноэлементное множество.

Таким образом, существует два различных класса эквивалентности: $\{2\}$ и $\{3,4,5\}$. Дадим следующую интерпретацию рассмотренной задачи. Можно сказать, что данное отношение разбивает множество школьных оценок на два класса: неудовлетворительная оценка и множество положительных оценок. •

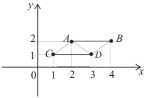
Вообще, термин «класс эквивалентности» оправдан тем, что множество всех классов образует разбиение исходного множества. Это важное утверждение легко получить, используя критерий равенства классов: классы $[a]_\rho$ и $[b]_\rho$ совпадают тогда и только тогда, когда $a\rho b$ (см. задачи № 160 и № 161).

Это обстоятельство позволяет из исходного множества A сконструировать новое множество, элементами которого являются классы разбиения (то есть классы эквивалентности ρ). Полученное множество классов называется *фактор-множеством* множества A по эквивалентности ρ и обозначается A / ρ. Все элементы, лежащие в одном классе «старого» множества, мысленно «склеиваются» в один элемент нового множества (фактор-множества). В примере 8.2.2 каждая из отметок 3, 4, 5 в новом множестве сливается в одну положительную оценку. В примере 8.2.1 множество всех точек класса эквивалентности определяет новый единый объект – окружность.

Мы кратко описали процесс абстрагирования в математике, то есть отвлечение от тех свойств, которыми различаются первоначальные объекты.

Таким образом, с помощью отношения эквивалентности можно описать новое свойство, характеризующее различие элементов множества.

Пример 8.2.3. Рассмотрим координатную плоскость, представляющую собой множество точек прямого произведения $\mathbf{R}^2 = \{(x,y) \mid x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}\}$.



Зададим отрезок AB, представляющий собой множество точек $\{(x;2) \mid 2\leq x\leq 4\}$, и отрезок CD, являющийся множеством $\{(x;1) \mid 1\leq x\leq 3\}$. Ясно, что эти множества различны; например, точка $C = (1;1)$ не принадлежит отрезку AB.

Определим на множестве всех отрезков плоскости следующее отношение ρ: $x\rho y \Leftrightarrow$ «Отрезки x и y можно совместить наложением». Это отношение является отношением эквивалентности. Теперь мы можем назвать отрезки равными[4], если они лежат в одном классе эквивалентности (то есть находятся в отношении ρ). В этом случае отрезок AB равен отрезку CD (они совмещаются параллельным переносом). Именно так мы и понимаем равенство отрезков. Однако, строго говоря, это уже другое равенство, а именно равенство классов эквивалентностей, но не равенство множеств точек (ни одна точка отрезка AB не принадлежит отрезку CD). Итак, мы отвлеклись от не существенных с геометрической точки зрения различий двух отрезков и признали отрезки равными.

Аналогичным образом обстоит дело с понятием равенства треугольников. На рисунке треугольник ACD равен треугольнику ABD, однако это равенство опять-таки является новым отношением. Изначально треугольники различны, если рассматривать их как подмножества точек в $\mathbf{R}^2$. Только после того как на множестве треугольников ввести отношение эквивалентности (два треугольника находятся в этом отношении, если их можно совместить наложением), мы имеем право отвлечься от того, что треугольники состоят из различных множеств точек. В геометрии мы всегда считаем треугольники, которые находятся в описанном отношении, равными. •

Постарайтесь самостоятельно проанализировать два отношения эквивалентности, которые рассматриваются на множестве всех направленных отрезков (векторов). Одно из них приводит к понятию равных векторов. Однако это отношение не совпадает с обычным отношением равенства геометрических фигур. Если направленные отрезки можно совместить наложением, то их еще нельзя считать равными (хотя такое отношение, конечно, будет отношением эквивалентности, но оно не позволит отразить понятие направления, а в случае вектора это свойство является существенным).

Пример 8.2.4. Рассмотрим множество A всех уравнений вида $f(x) = g(x)$ от одной переменной.

---

[4] Иногда отрезки (и любые фигуры), находящиеся в данном отношении, называют конгруэнтными.

На множестве A можно рассмотреть так называемое формальное равенство уравнений, понимая под уравнением последовательность символов математического языка. В этом случае равные уравнения – это равные упорядоченные n-ки символов. Например, уравнения $x = 3$ и $x + 1 = 4$ различны.

С другой стороны, с математической точки зрения любое уравнение определяет некоторый предикат, который характеризуется главным образом тем множеством, в точках которого предикат принимает истинное значение. В каком именно виде задан предикат, для математической теории неважно.

Отсюда возникает следующее отношение, которое отождествляет уравнения с одинаковым множеством решений. Уравнения $f(x) = g(x)$ и $f_1(x) = g_1(x)$ называются равносильными, если совпадают множества их решений. Нетрудно видеть, что отношение равносильности является отношением эквивалентности. Например, уравнения $x^2 = 4$ и $(x–2)(x+2) = 0$ равносильны, то есть лежат в одном классе эквивалентности. В математической практике непринято вместо фразы «Уравнения равносильны» говорить, что уравнения равны, однако это не меняет суть дела, и равносильные уравнения, по крайней мере в уме, можно называть равными. •

Подведем некоторые итоги. Если в контексте изучаемой теории нас не интересуют различия между объектами, связанными отношением эквивалентности ~, то элементы a и b, такие, что a~b, мы считаем равными.

Итак, понятие равенства объектов a и b множества A можно понимать в двух аспектах:

– a и b – это один и тот же элемент множества A;

– a и b находятся в некотором заранее определенном отношении эквивалентности.

Более детальное изучение приложений отношения эквивалентности будет проведено в курсе алгебры. Один из первых новых примеров отношения эквивалентности, которое вы подробно рассмотрите, позволит разбить множество всех целых чисел на конечное число классов.

В заключение пункта заметим, что любое разбиение множества A на классы эквивалентности однозначно определяет отношение эквивалентности следующим правилом: элементы a и b являются эквивалентными тогда и только тогда, когда они лежат в одном классе.

8.3. Отношения между множествами. Функции

Пусть даны два произвольных множества A и B. Рассмотрев пару элементов (x,y), где $x \in A$, $y \in B$, можно смоделировать связь элементов между различными множествами.

Отношением (или *соответствием*) между множествами[5] A и B называется произвольное множество пар, первая координата которых принадлежит множеству A, а вторая – множеству B.

Другими словами, отношение между множествами A и B есть подмножество прямого произведения $A \times B$.

Бинарное отношение на множестве A является частным случаем отношения между множествами A и B ($B=A$).

Пусть ρ – произвольное отношение между множествами A и B. Так же как в случае отношения на одном множестве, если пара (x,y) принадлежит отношению ρ, пишут $x\rho y$. Будем говорить, что x соответствует y. Элемент y называется *образом* элемента x, а элемент x – *прообразом* y.

Множество всех элементов из A, каждый из которых является прообразом хотя бы одного элемента из B, называется *областью определения отношения* ρ и обозначается $D(\rho)$ или D_ρ:

$$D(\rho) = \{x \in A \mid \exists y \in B \ (x\rho y)\}.$$

Множество всех элементов из B, каждый из которых является образом хотя бы одного элемента из A, называется *множеством значений* (или просто *образом*) *отношения* ρ и обозначается $\mathrm{Im}\,\rho$[6] или E_ρ:

$$\mathrm{Im}\,\rho = E_\rho = \{y \in B \mid \exists x \in A \ (x\rho y)\}.$$

Пример 8.3.1. Пусть $A = \{б,в,г,д\}$, $B = \{1,2,3,4,5\}$.

Рассмотрим соответствие $\rho = \{(б,3), (б,4), (в,3), (в,5), (г,3)\}$.

Тогда $D(\rho) = \{б,в,г\}$, $E_\rho = \{3,4,5\}$. Элементы $б,в \in A$ имеют по два образа, элемент г – единственный образ. Число $3 \in B$ имеет три прообраза, а числа 4 и 5 – по одному прообразу. •

Вообще, бинарные отношения ρ между конечными множествами A и B зачастую удобно представлять графически. В этом случае множества A и B изображаются на диаграмме Эйлера–Венна, и при $x\rho y$, где $x \in A$ и $y \in B$, из

[5] Вместо слов «отношение между множествами» иногда говорят «отношение между элементами множеств».
[6] D, Im – от английских слов *domain* (область) и *image* (образ).

точки x в точку y проводится стрелка $x \to y$. Даже если множества A и B совпадают, на диаграмме они рисуются разными кругами.

Пусть дано отношение ρ между множествами A и B. Отношение ρ^{-1} между множествами B и A называется *обратным* к отношению ρ, если

$$\forall x \in B\ \forall y \in A\ (x\rho^{-1}y \leftrightarrow y\rho x).$$

Пример 8.3.2. Целое число x делит целое число y тогда и только тогда, когда y делится на x. Поэтому отношение «делит» является обратным к отношению делимости. •

Важным видом отношения между двумя множествами является функциональное отношение.

Понятие функции формировалось в математике постепенно и использовалось задолго до построения теории множеств. Сформулируем наиболее распространенное в учебниках по математике определение функции. *Функцией* с областью определения A и со значениями в B называется правило (закон, соответствие), по которому каждому элементу множества A сопоставляется единственный элемент из множества B. Именно такое определение принято в школьном курсе математики с учетом того, что в основном рассматриваются числовые функции, то есть A и B – это подмножества $\mathbf{R}$. Здесь слова «правило», «закон», «соответствие» понимаются как интуитивно ясные.

Уточнив выше слова «Элементу x сопоставляется (или соответствует) элемент y» и не задавая в явном виде область определения, имеем следующее самое общее определение функционального отношения.

Отношение ρ между множествами A и B называется *функциональным*, если каждый элемент из множества A имеет не более одного образа из B:

$$\forall x \in A\ \forall y_1, y_2 \in B\ (x\rho y_1 \wedge x\rho y_2 \to y_1 = y_2).$$

Другими словами, функциональное отношение – это такое отношение, никакие две различные пары которого не имеют одинаковых первых координат.

Замечание. Строго говоря, функциональное, как и любое, отношение надо рассматривать вместе с парой множеств A и B. Поэтому с формальной точки зрения имеем тройку $\langle A, \rho, B \rangle$, где множество пар ρ удовлетворяет указанному выше свойству. Само множество пар также называют *графиком* функционального отношения и, в случае числовых множеств, изображают на координатной плоскости. Если область определения функционального отношения не совпадает с множеством A, то говорят о *частичной функции*.

Функциональное отношение обычно обозначают малыми латинскими буквами f, g, h.

Если у функционального отношения сразу указывают область определения, то есть то множество, откуда берутся первые координаты, то в большинстве определений используются слова «функция с областью определения A» или «функция, определенная на A». Приведем такое определение.

Функцией с областью определения A и со значениями в B (или, кратко, *функцией из A в B*) называется отношение f между A и B, при котором для любого элемента x из A существует единственный элемент y из B, такой, что $x f y$. В этом случае пишут $f: A \to B$ или $A \xrightarrow{f} B$. Функцию из A в B также называют *отображением множества A в множество B*.

Так как каждый элемент a из области определения имеет ровно один образ b, то этот образ обозначают $f(a)$. Вместо $a f b$ пишут $b = f(a)$ или $f: a \mapsto b$. Заметим, что есть другие формы записи образа элемента a. Например, иногда опускают скобки и пишут fa. Иногда знак функции пишут справа от аргумента: af. Это непривычно, но в некоторых случаях удобно.

Числовые функции являются объектом изучения специального раздела математики – математического анализа.

Поговорим подробно о распространенном способе задания функции формулой. Пусть имеется выражение-терм, построенное с помощью переменной x и знаков арифметических операций над числами. Например, $(x^2+3)^2-2x$. Обозначим такой терм $f(x)$. Тогда формула $y = f(x)$ определяет некоторую функцию из $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}$. Одна только формула задает функцию неоднозначно, так как неясно, какие именно значения переменной x можно подставлять в терм $f(x)$. Как только будет указана область определения D_f, функция определяется однозначно и ее график представляет следующее множество пар: $\{(x, f(x)) \mid x \in D_f\}$. Множество значений будет задано автоматически.

Пример 8.3.3. Зададим функцию f формулой $y=x^4-4x$ с областью определения $A=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Множество значений тогда будет равно $E_f = \{24, 5, 0, -3, 8\}$. Запишите все пары данного отношения.

Этой же формулой можно задать другую функцию g, рассмотрев область определения $A_1=\{0{,}5;\ 1;\ 1{,}5;\ 2\}$. Функция g будет представлять уже другое множество пар. Множество значений $E_g = \{-1{,}9375;\ -3;\ -0{,}9375;\ 8\}$.

Можно рассмотреть в качестве области определения все множество **R**. Тогда получим бесконечное множество пар. Множеством значений будет являться промежуток числовой прямой $[-3; +\infty)$. Постарайтесь это обосновать. •

Сам термин «область определения» предполагает, что эту область надо задавать при определении конкретной функции. Это согласуется с понятием равных функций, которое принято во многих учебниках. Две функции f и g называются *равными*, если равны их области определения и для всех значений x из этого множества $f(x) = g(x)$. Условие определения равносильно равенству множеств $\{(x, f(x)) \mid x \in D_f\} = \{(x, g(x)) \mid x \in D_g\}$.

Однако часто при задании функции формулой $y = f(x)$ область определения не указывают. В этом случае предполагается, что рассматривается множество пар $(a, f(a))$ для всех значений $a \in \mathbf{R}$, таких, что при подстановке вместо переменной x числа a терм $f(x)$ имеет определенное значение (то есть является именем некоторого числа). В этом случае корректно ставить вопрос о нахождении области определения функции.

Пример 8.3.4. Найдем область определения функции, заданной формулой $y = \dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}}$. Для этого надо найти все значения переменной $x \in \mathbf{R}$, при которых имеет смысл выражение $\dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}}$. Подкоренное выражение должно быть неотрицательным, поэтому $1-x \geq 0$, откуда $x \leq 1$. Знаменатель дроби не должен обращаться в 0, значит, $1-\sqrt{1-x} \neq 0$. Равенство нулю возможно только в случае, когда $x=0$. Пересекаем два полученных множества и получаем ответ: $D_f = (-\infty;0) \cup (0;1] = (-\infty;1] \setminus \{0\}$. •

Замечание. Наряду с функциями от одной переменной можно рассматривать функции от n переменных. В этом случае область определения представляет собой прямое произведение множеств $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$. На языке функций можно выразить понятие предиката, рассмотренное в главе 1. Напомним, что предикатом мы назвали предложение, зависящее от переменных. Пусть имеется одна переменная, которая может принимать значения из множества A. Тогда предикат задает функцию с областью определения A и со значениями в множестве $\{и, л\}$. Аналогичным образом n-местный предикат задает функцию от n переменных, определенную на некотором множестве $M = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, со значениями в множестве $\{и, л\}$.

В заключение рассмотрим важный частный случай функционального отношения – взаимно однозначное соответствие.

Отношение между множествами A и B называется *взаимно однозначным соответствием*, если каждому элементу множества A соответствует единственный элемент множества B, а при обратном отношении каждому элементу множества B соответствует единственный элемент множества A.

Другими словами, при взаимно однозначном соответствии между A и B каждый элемент множества A имеет единственный образ, а каждый элемент множества B – единственный прообраз. В этом случае множества A и B равноправны.

Отношение f является взаимно однозначным тогда и только тогда, когда f является функцией $A \to B$ и обратное отношение f^{-1} также является функцией $B \to A$.

Взаимно однозначное соответствие также называют *биекцией*.

Пример 8.3.5. Рассмотрим взаимно однозначное соответствие между множествами $A = \{к,л,б,в,г,д\}$ и $B = \{2,3,4,5,12,13\}$:

$$f = \{(б,2), (в,3), (г,4), (д,5), (к,12), (л,13)\}.$$

Это отношение можно понимать следующим образом. Каждой букве множества A ставится в соответствие номер ее позиции в алфавите русского языка. •

Графически биекция означает, что из каждой точки множества A выходит ровно одна стрелка (направленная в B) и каждая точка множества B служит концом ровно одной стрелки, исходящей из A.

Если множества A и B конечны и между ними установлено взаимно однозначное соответствие, то A и B содержат одно и то же число элементов.

Взаимно однозначное соответствие позволяет заменить рассмотрение элементов одного множества элементами другого множества, то есть вместо элементов множества рассматривать их образы. Говорят, что элемент $x \in A$ отождествляется с элементом $y \in B$, являющимся образом x.

Понятие взаимно однозначного соответствия играет большую роль в теории множеств, так как позволяет сравнивать бесконечные множества. Например, между множествами $\mathbf{N}$ и $\mathbf{Z}$ можно установить взаимно однозначное соответствие, а между множествами **N** и **R** нельзя. Доказательство невозможности установить между бесконечными множествами биекцию является, вообще говоря, непростой задачей.

Пример 8.3.6. Установим между множествами **N** и **Z** взаимно однозначное соответствие.

Определим отношение f между **Z** и **N** правилом:

$$\text{если } x \geq 0, \text{ то } x \mapsto 2x+1; \text{ если } x<0, \text{ то } x \mapsto -2x.$$

Опишем правило словесно: каждому неотрицательному целому числу x поставили в соответствие нечетное натуральное число $2x+1$, а каждому отрицательному целому числу – четное натуральное число $(-2x)$.

Ясно, что f – функция из **Z** в **N**. Рассмотрим образы некоторых целых чисел: $f(0)=1$, $f(1)=3$, $f(2)=5$, $f(3)=7$ и т. д., $f(-1)=2$, $f(-2)=4$, $f(-3)=6$ и т. д.

Обратное отношение устроено следующим образом. Берем произвольное натуральное число y. Если оно четное, то есть имеет вид $2n$, значит, $f^{-1}(y)=-n$. Если число y нечетное, то есть имеет вид $2n+1$, где $n \geq 0$, то $f^{-1}(y)=n$. Итак, f^{-1} – функция из **N** в **Z**. •

Глава 3. Азы комбинаторики

Введение

Комбинаторика, или комбинаторный анализ, – это раздел математики, посвященный решению задач выбора и расположения элементов конечных множеств по заданным правилам.

Выбранные и расположенные по определенным правилам элементы множества называют *выборкой*. Наряду с этим термином также используют слова «комбинация элементов» или «набор элементов». Очень часто бывает нужно определить или оценить число комбинаций – этим занимается перечислительная комбинаторика. Большое число подобного рода задач можно решить, выполнив полный перебор требуемых комбинаций.

Рассмотрим пример. Определим, сколько существует двузначных чисел, цифры которых различны и нечетны.

Перебор организуем следующим образом: фиксируем первую цифру 1 и перебираем возможные значения второй по порядку: 3, 5, 7, 9 (цифра 1 уже взята). После этого фиксируем первую цифру 3 и выполняем ту же процедуру перебора второй цифры, значения которой могут быть такими: 1, 5, 7, 9. Перебираем по порядку все возможные значения первой цифры. Результат перебора организуем в виде таблицы, в каждом столбце которой записано число с фиксированной первой цифрой:

13	31	51	71	91
15	35	53	73	93
17	37	57	75	95
19	39	59	79	97

В результате полного перебора получаем 20 чисел.

Итак, мы решили простейшую комбинаторную задачу. Для этого были в явном виде выписаны все комбинации, удовлетворяющие условию задачи.

Конечно, далеко не всегда нужно выписывать все комбинации, тем более если их число велико. В наше время большую помощь оказывают компьютеры, которые позволяют произвести подсчет количества комбинаций во много раз быстрее человека. Для этого нужно запрограммировать алгоритм перебора и поручить решение компьютеру. Приведем пример.

Пусть требуется найти число всех упорядоченных троек, составленных из элементов множества $\{1,2,3,4,5\}$, при этом сумма выбранных чисел должна быть больше 5.

Составим схему алгоритма перебора на языке программирования Паскаль:

```
for i:=1 to 5 do
  for j:=1 to 5 do
    for k:=1 to 5 do
      if i+j+k>5 then begin write(i,j,k,' '); c:=c+1 end;
writeln; writeln(c);
```

В результате работы программы на экран монитора будут выведены требуемые комбинации, а переменная c выдаст их общее количество.

Однако даже компьютер не может считаться универсальным инструментом решения комбинаторных задач.

Дело в том, что число вариантов перебора может быть очень большим и реально выполнить такой перебор бывает не под силу даже самым мощным компьютерам. Проиллюстрируем сказанное следующими рассуждениями.

Пусть исходные данные задачи определяются некоторым параметром n. Обозначим $t(n)$ – число требуемых вариантов перебора. Мы отмечали, что, например, при составлении таблицы истинности формулы, содержащей n переменных, требуется перебрать 2^n упорядоченных n-ок, составленных из символов *и* и *л*. Рассмотрим эту зависимость: $t(n)=2^n$.

Для небольших значений n число $t(n)$ также невелико. Но уже начиная с n=10 скорость увеличения значений функции $t(n)= 2^n$ быстро возрастает.

Если n=10, то $t(n)=2^{10}=1024\approx10^3$.

Если n=20, то $t(n)=2^{20}=(2^{10})^2\approx(10^3)^2=10^6=1000000$.

Если n=30, то $t(n)=2^{30}=(2^{10})^3\approx(10^3)^3=10^9=1000000000$.

Предположим, что очень мощный компьютер умеет выполнять 10 миллиардов (то есть 10^{10}) операций в секунду. Тогда при n=30 машине потребуется только одна десятая секунды, чтобы перебрать 10^9 комбинаций. Но увеличим значение n только в 3 раза и посчитаем, сколько потребуется времени для значения n=90:

$t(90)=2^{90}=(2^{10})^9\approx(10^3)^9=10^{27}=10^{10}\cdot10^{17}$.

Таким образом, для n=90 потребуется 10^{17} секунд (а при n=30 требовалось только 0,1 секунды). Оценим в разумных единицах, что означает 10^{17} секунд.

В году 365 дней (погрешность високосного года не учитываем), каждый день содержит 24 часа, каждый час – 60 минут, каждая минута –

60 секунд. Получаем, что в году 365·24·60·60=31516000 секунд. Разделив число 10^{17} на 31516000, получим:

$$\frac{10^{17}}{31516000} = \frac{1}{31516} \cdot 10^{14} \approx 0{,}00003 \cdot 10^{14} = 3 \cdot 10^{9}.$$

Итак, чтобы выполнить 2^{90} операций рассматриваемому компьютеру потребуется примерно 3 миллиарда лет.

Вывод: при решении комбинаторных задач требуется искать пути сокращения рассматриваемых вариантов, а также использовать правила и формулы, позволяющие находить количество комбинаций, не прибегая к явному перебору. В этом состоит назначение комбинаторного анализа.

§ 9. Основные комбинаторные принципы

9.1. Правило произведения

Сформулируем правило произведения, которое также называют принципом умножения.

Пусть требуется выполнить последовательность действий. Если первое действие можно выполнить n способами и, независимо от этого, второе действие можно выполнить k способами, то выполнить первое и второе действия одновременно можно $n{\cdot}k$ числом способов.

Пример 9.1.1. Используя правило произведения, решим задачу из введения к главе. Определим, сколько существует двузначных чисел, цифры которых различны и нечетны.

Чтобы составить двузначное число, можно последовательно выполнить следующие два действия: выбрать цифру десятков, а затем выбрать цифру единиц. Первое действие можно выполнить пятью способами, так как имеется 5 нечетных цифр $\{1,3,5,7,9\}$, а второе действие – четырьмя способами, так как можно взять любую нечетную цифру, которая не равна выбранной цифре при первом действии. Имеем 5·4=20 способов выполнить указанные действия, значит, существует 20 требуемых в задаче чисел.

Заметим, что можно изменить порядок действий: вначале выбрать цифру единиц, затем цифру десятков. Это никак не повлияет на ответ. •

Правило произведения можно сформулировать на языке множеств. *Пусть множество A содержит n элементов, а множество B имеет k элементов. Тогда можно составить nk упорядоченных пар (a,b), в которых* *первый элемент выбирается из множества A, а второй элемент – из множества B.*

Отсюда вытекает, что число элементов прямого произведения множеств A и B вычисляется по формуле $|A\times B| = |A|\cdot|B|$.

Суть правила произведения не изменится, если требуется выполнить более двух действий.

Пример 9.1.2. Даны множество букв $A = \{a,b,c\}$, множество цифр $B = \{2,3,4,5\}$ и множество знаков $C = \{+,–\}$. Сколькими способами можно составить комбинацию вида: буква, цифра, знак?

Так как букву можно выбрать тремя способами, цифру – четырьмя способами, а знак – двумя способами, то последовательно выбрать букву, цифру и знак можно $3\cdot4\cdot2=24$ способами. Выпишите в явном виде все такие комбинации. •

Пример 9.1.3. Сколько существует двузначных чисел, первая цифра (цифра десятков) которых меньше 4, а вторая цифра нечетна и отлична от первой?

Первую цифру можно выбрать тремя способами (из цифр 1, 2, 3). После этого вторую цифру можно выбрать пятью способами (из цифр 1, 3, 5, 7, 9), но лишь при условии, что при первом действии была выбрана цифра 2. Если же изначально была выбрана, например, цифра 1, то вторую цифру можно выбрать только четырьмя способами (цифру 1 уже использовать нельзя). Итак, мы не можем однозначно сказать, сколькими способами можно выполнить второе действие. Поэтому правило произведения здесь непосредственно применить нельзя. •

9.2. Правило суммы

Сформулируем правило суммы (или, по-другому, принцип сложения) в общем виде на языке множеств.

Пусть множество S разбито на классы A_1, A_2, …, A_t. Тогда число элементов множества S вычисляется по формуле:

$$|S| = |A_1|+|A_2|+ \ldots +|A_t|.$$

Таким образом, чтобы найти число элементов в S, надо сосчитать число элементов в каждом классе и сложить полученные числа.

В частности, если множество S разбито на 2 класса A и B, то $|S| = |A|+|B|$.

Сформулируем правило суммы на другом языке.

Пусть существует n_1 объектов, обладающих свойством A_1, n_2 объектов, обладающих свойством A_2, и так далее, n_t объектов, обладающих свойством A_t, при этом ни один объект не обладает одновременно двумя свойствами. Тогда число объектов, обладающих одним из указанных свойств (либо A_1, либо A_2, …, либо A_t), равно сумме $n_1+n_2+…+n_t$.

Пример 9.2.1. Используя принцип сложения, найдем число двузначных чисел, первая цифра которых меньше 4, а вторая цифра нечетна и отлична от первой.

Существует четыре числа, у которых первая цифра равна 1. Существует пять чисел, у которых первая цифра равна 2, и пять чисел, у которых первая цифра равна 3. Следовательно, чисел, у которых первая цифра равна либо 1, либо 2, либо 3, ровно 4+5+5=14. •

Пример 9.2.2. В урне *A* лежат 7 белых, 2 синих и 3 зеленых шара, в урне *B* лежат 5 белых, 4 синих и 2 зеленых шара. Сколькими способами можно выбрать из каждой урны по шару так, чтобы они были одного цвета?

Вначале сосчитаем, сколькими способами можно выбрать из каждой урны по белому шару. Фиксируем порядок выбора: вначале из урны *A*, затем из урны *B* (порядок выбора можно поменять, это никак не отразится на числе комбинаций). Из урны *A* белый шар можно выбрать семью способами, из урны *B* белый шар можно выбрать пятью способами. По правилу произведения находим $7 \cdot 5=35$ вариантов выбора белых шаров.

Аналогичным образом считаем число способов выбрать из обеих урн синие шары: $2 \cdot 4=8$, затем зеленые шары: $3 \cdot 2=6$.

Теперь находим число вариантов выбрать шары одного цвета: белого, синего, или зеленого. По принципу сложения имеем 35+8+6=49 вариантов выбора. •

9.3. Принцип дополнения

Принцип дополнения вытекает из правила сложения.

Пусть A есть подмножество множества S. Рассмотрим дополнение множества A до S. Множества A и $\overline{A}$ образуют разбиение S на два класса. Поэтому $|S| = |A|+|\overline{A}|$. Отсюда $|A| = |S|-|\overline{A}|$.

Пусть известно общее число n рассматриваемых элементов (или комбинаций элементов) и число k элементов, не удовлетворяющих свойству A. Тогда число элементов, удовлетворяющих свойству A, равно n–k.

Пример 9.3.1. В группе детского сада 16 человек, из них 9 девочек. Как найти число мальчиков, не пересчитывая их?

По правилу дополнения: 16–9=7. •

Пример 9.3.2. В примере 9.2.2 было найдено число способов выбора одинаковых по цвету шаров из двух урн. Найдем, сколькими способами можно выбрать из каждой урны по одному шару так, чтобы шары были разного цвета.

Вначале найдем, сколькими способами можно выбрать по одному шару из каждой урны. В урне A 12 шаров, а в урне B 11 шаров, поэтому всего можно получить $12\cdot 11=132$ комбинаций. Так как в 49 комбинациях шары одного цвета, то шары разного цвета будут в 132–49=83 комбинациях. •

Упражнение. Решите задачу из примера 9.3.2, используя только правила сложения и умножения.

9.4. Формулы включений и исключений

Пусть известно число объектов, лежащих в множестве A и в множестве B. Если множества A и B не пересекаются, то, сложив эти числа, получим число объектов, лежащих в объединении множеств A и B.

Предположим теперь, что существуют объекты, лежащие одновременно в двух множествах. Нетрудно понять, что, сложив числа $|A|$ и $|B|$, объекты, лежащие и в A, и в B, будут сосчитаны дважды. Поэтому, чтобы получить правильный ответ (в котором каждый объект должен быть учтен один раз), нужно исключить из найденной суммы объекты, лежащие одновременно и в A, и в B.

Таким образом, для двух множеств A и B имеет место формула:

$$|A\cup B| = |A|+|B|-|A\cap B|. \quad (1)$$

Эту формулу можно получить из правила сложения. Действительно, множество $A\cup B$ может быть разбито на классы $A\overline{B}$, AB, $\overline{A}B$, множество A – на классы $A\overline{B}$ и AB, множество B – на классы $\overline{A}B$ и AB (знак пересечения опускаем). Поэтому правую часть равенства можно расписать следующим образом:

$$|A|+|B|-|AB| = |A\overline{B}|+|AB|+|\overline{A}B|+|AB|-|AB| = |A\cup B|.$$

Как видно, правило сложения, правило дополнения и полученная формула связаны между собой. Рассмотрим пример задачи, которую решим тремя способами.

Пример 9.4.1. Определим, сколько существует двузначных чисел, в записи которых имеется хотя бы одна четная цифра.

Первый способ. Пусть A – множество двузначных чисел, у которых первая цифра четна, B – множество двузначных чисел, у которых вторая цифра четна. Имеем $|A| = 4 \cdot 10 = 40$, так как первую цифру можно выбрать четырьмя способами (из множества $\{2,4,6,8\}$), а вторую цифру – любым из 10 способов (всего 10 цифр, учитывая цифру 0). Аналогично $|B| = 9 \cdot 5 = 45$, так как первая цифра может быть любой, кроме 0, а вторая цифра – любая четная.

Однако правило сложения применить нельзя, поскольку есть числа, входящие и в множество A, и в множество B, – это числа, обе цифры которых четные. Таких чисел $|A \cap B| = 4 \cdot 5 = 20$.

По формуле (1) получаем: $|A \cup B| = 40 + 45 - 20 = 65$.

Второй способ. Разобьем множество всех требуемых чисел на три класса. Первый класс – это числа, первая цифра которых четна, а вторая нечетна. Таких чисел $4 \cdot 5 = 20$. Второй класс – числа, первая цифра которых нечетна, а вторая цифра четна. Таких чисел $5 \cdot 5 = 25$. Третий класс – числа, цифры которых четны. Этих чисел $4 \cdot 5 = 20$. Тогда общее количество чисел равно $20+25+20 = 65$.

Заметим, что можно было разбить множество таких чисел на два класса: множество чисел, первая цифра которых четная, а вторая – любая (их $4 \cdot 10 = 40$), и множество чисел, первая цифра которых нечетная, а вторая четная (их $5 \cdot 5 = 25$). В сумме снова получаем 65.

Третий способ. Всего двузначных чисел $9 \cdot 10 = 90$. Из них чисел, обе цифры в которых нечетные, $5 \cdot 5 = 25$. Тогда двузначных чисел, в которых имеется хотя бы одна четная цифра, равно $90-25 = 65$. •

Для трех множеств имеет место следующая формула:

$$|A \cup B \cup C| = |A|+|B|+|C|-|A \cap B|-|A \cap C|-|B \cap C|+|A \cap B \cap C|. \quad (2)$$

Для обоснования можно использовать один из двух способов. Можно представить объединение трех множеств в виде $(A \cup B) \cup C$ и применить формулу (1). Можно рассмотреть множества, на которые разбиваются множества, присутствующие в формуле (2), и применить принцип сложения.

Пример 9.4.2. Студент пришел в библиотеку в поисках книги, которая содержит одновременно материал по химии, по физике и по математике. Библиотекарь заявила, что существует всего 30 книг, имеющих хотя бы одно из перечисленных свойств, причем книг с материалом по химии всего 23 штуки, книг по физике 21 штука и книг по математике 17. Можно ли наверняка утверждать, что нужная студенту книга имеется в библиотеке?

Рассмотрим три множества: A – множество книг, содержащих материал по химии, B – множество книг с материалом по физике, C – множество книг с материалом по математике. По условию $|A|=23$, $|B|=21$, $|C|=17$, $|A \cup B \cup C|=30$.

Допустим, что нужная студенту книга отсутствует. Это означает, что $|A \cap B \cap C|=0$.

Снова для краткости будем опускать знак пересечения и писать AB вместо $A \cap B$. По формуле (2) имеем:

$$30 = 23 + 21 + 17 + |AB| + |AC| + |BC|.$$

Отсюда $|AB| + |AC| + |BC| = 31$ (∗).

Множества AB и AC не пересекаются, так как пересечение $(A \cap B) \cap (A \cap C)$ пусто. Значит, по правилу сложения число элементов объединения множеств AB и AC равно сумме $|AB| + |AC|$. Но $AB \cup AC$ – это множество книг, содержащих материал по химии и, вместе с этим, материал по физике или математике, то есть $AB \cup AC$ – это подмножество множества A. Поэтому число элементов этого множества не превосходит число элементов, лежащих в A. Итак, $|AB| + |AC| \leq 23$.

Рассуждая аналогично, получаем, что $|AB| + |BC| \leq 21$ и $|AC| + |BC| \leq 17$. Складывая почленно три неравенства, имеем:

$$2 \cdot (|AB| + |AC| + |BC|) \leq 61,$$

откуда получаем, что сумма $|AB| + |AC| + |BC|$ не превосходит 30,5. А это противоречит равенству (∗).

Следовательно, если библиотекарь сказала правду, то нужная студенту книга существует. •

9.5. Принцип взаимно однозначного соответствия

Пусть требуется сосчитать число элементов множества A. Предположим, что число элементов множества B сосчитать легко или оно заранее известно.

Если между элементами множеств A и B установлено взаимно однозначное соответствие, то во множестве A столько же элементов, сколько во множестве B.

Пример 9.5.1. Имеется некоторая группа мальчиков и девочек. Как узнать, число девочек равно числу мальчиков или нет? Конечно, можно пересчитать девочек и мальчиков. Но можно попросить построиться ребят парами мальчик–девочка. Если никого без пары не останется, значит, девочек и мальчиков одинаковое число. •

Пример 9.5.2. Сосчитаем, сколько существует подмножеств n-элементного множества.

Рассмотрим произвольное n-элементное множество $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Пусть A – подмножество S. Поставим в соответствие A упорядоченную n-ку, составленную из 0 и 1, по следующему правилу: если $a_i \in S$, то на i-й позиции записываем 1; в противном случае на i-й позиции записываем 0.

Тогда каждому подмножеству соответствует единственная комбинация нулей и единиц. Наоборот, для каждой такой комбинации можно получить единственное подмножество. Пусть, например, $S = \{1,2,3,4,5\}$. Тогда подмножеству $\{1,4\}$ соответствует набор 10010, а набору 01101 соответствует множество $\{2,3,5\}$. Набор из одних нулей соответствует пустому множеству, а набор из одних единиц – множеству S.

Таким образом, подмножеств ровно столько, сколько существует наборов длины n, составленных из 0 и 1. Для каждой позиции данной комбинации имеется два варианта выбора. Применяя правило произведения, видим, что количество упорядоченных n-ок из 0 и 1 равно произведению, состоящему из n множителей, равных 2, то есть $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$. •

Получаем важный вывод: *число всевозможных подмножеств n-элементного множества равно* 2^n.

Если при взаимно однозначном соответствии элементу a соответствует элемент b, то можно сказать, что элемент a отождествляется с элементом b.

В разборе предыдущего примера использовалась *идея кодирования*. Очень часто эта идея применяется следующим образом: выборка объектов, удовлетворяющих условию задачи, отождествляется с набором, составленным из элементов некоторого множества по некоторым правилам. Главное в этом случае, – убедиться в том, что указанное соответствие взаимно однозначно. Рассмотрим два примера задач.

Пример 9.5.3. Трех первоклассников требуется распределить по четырем параллельным классам. Сколькими способами это можно сделать?

Каждому из первоклассников присвоим номер. Также обозначим классы буквами *а*, *б*, *в*, *г*. Рассмотрим множество упорядоченных троек этих букв. Каждому распределению детей по классам поставим в соответствие ровно одну такую тройку: первая координата будет определять класс, в который попал первый ребенок (то есть ребенок с номером 1), вторая координата – класс, в который попал второй ребенок, и третья координата – класс, в который попал третий ребенок. Любая тройка букв *а*, *б*, *в*, *г* при обратном соответствии однозначно определяет способ распределения первоклассников по классам, так как каждого первоклассника можно отдать в любой из четырех классов, независимо от того, куда будут распределены другие дети. Например, тройка (*а*, *а*, *б*) означает, что детей с номерами № 1 и № 2 отдали в класс *а*, а ребенка № 3 – в класс *б*; тройка (*а*, *б*, *а*) означает, что в класс *а* попали первый и третий первоклассники, а второй ребенок попал в класс *б*.

Таким образом, требуется сосчитать количество упорядоченных троек, составленных из четырехэлементного множества. Всякую тройку можно составить, выполнив три действия: выбрав первую координату (это можно сделать четырьмя способами), затем выбрав вторую координату (это можно сделать также четырьмя способами) и выбрав третью координату (снова одним из четырех способов). Всего получаем $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ способа составить упорядоченную тройку. Итак, число распределений трех первоклассников по четырем классам равно 64.

Конечно, данную задачу можно решить, напрямую применив правило произведения: первого ученика можно направить в любой из четырех классов (4 способа выбора), второго ученика – в любой из четырех классов, аналогично с третьим учеником. Сразу получаем произведение $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$. •

Тем не менее подробно расписанные в примере рассуждения при решении более сложных задач часто оказываются полезными.

Пример 9.5.4. Сколькими способами из 6 человек можно выбрать трех членов культурно-массовой комиссии?

Казалось бы, можно рассуждать так: первого члена комиссии можно выбрать шестью способами, при любом способе его выбора второго члена комиссии можно выбрать пятью способами (один человек уже выбран), третьего – четырьмя способами. Однако, перемножив числа $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$, получим неправильный ответ. Разберемся, в чем здесь дело.

Занумеруем всех людей числами от 1 до 6. Каждой комиссии мы поставили в соответствие набор из трех различных номеров людей, которые были выбраны. Таких упорядоченных наборов действительно $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

Однако два различных набора, например (1,2,3) и (2,1,3), соответствуют одной и той же комиссии (выбраны одни и те же люди). Поэтому правильное количество способов будет меньше 120. Методика подсчета этого числа будет описана в пункте 11.2.

Основные отличия этого примера от предыдущего состоят в следующем: во-первых, при составлении набора каждый следующий элемент должен быть отличен от предыдущего (это отличие не сильно меняет решение), во-вторых, порядок следования элементов в наборе не имеет значения. •

В следующих двух параграфах будут рассмотрены правила подсчета основных комбинаций элементов в зависимости от того, важен ли порядок следования элементов и возможны ли повторения одних и тех же элементов. Выведенные формулы подсчета числа комбинаций, наряду с основными комбинаторными принципами, можно напрямую использовать при решении комбинаторных задач, удостоверившись, конечно, что число требуемых в задаче способов совпадает с числом комбинаций, подсчет которых происходит по выбранной формуле.

§ 10. Упорядоченные комбинации

Рассмотрим комбинации, в которых важен порядок следования элементов. В комбинаторике такие наборы называются перестановками и размещениями.

10.1. Определения и примеры

Пусть дано n-элементное множество S. Записав все его элементы в некотором порядке, получим набор, называемый *перестановкой из n элементов* (или *перестановкой n-й степени*).

Пример 10.1.1. $S = \{к,о,л\}$ – трехэлементное множество. Тогда можно получить следующие перестановки из трех элементов:

кол, кло, окл, олк, лко, лок. •

Нетрудно видеть, что перестановка из n элементов множества S представляет собой упорядоченную n-ку, составленную из различных элементов множества S. Составляя перестановку n-й степени, мы линейно упорядочиваем множество S.

Отметим, что термин «перестановка» в общечеловеческом смысле понимается как процесс изменения порядка каких-либо объектов.

В математике подобный процесс обычно называют подстановкой. Более точно *подстановка* – это отображение (преобразование) n-элементного множества на себя. Это соответствие удобно задавать таблицей, в которой в первой строке стоят числа 1, 2, …, n, а во второй – их образы, так что нижний элемент любого столбца есть образ верхнего элемента. В этом случае вторая строка такой таблицы является перестановкой множества $\{1,2,\ldots,n\}$. Приведем примеры подстановок из четырех элементов:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Последняя подстановка является тождественным преобразованием.

Рассмотрим упорядоченный набор, в котором каждый элемент некоторого множества записан определенное число раз. Занумеруем элементы исходного множества: a_1, a_2, …, a_k. Пусть элемент a_i встречается n_i раз. Число n_i называется кратностью элемента a_i. Такой набор называется *перестановкой с заданной кратностью элементов*. Набор кратностей (n_1, n_2, …, n_k) называется *составом* (или *типом*) *перестановки*.

Например, слово МАТЕМАТИКА является перестановкой букв М, А, Т, Е, И, К состава (2,3,2,1,1,1).

Нетрудно видеть, что длина перестановки равна сумме всех кратностей $n_1+n_2+\ldots+n_k$.

Пример 10.1.2. Составим всевозможные перестановки элементов a, b состава (2,3).

Организуем перебор:

aabbb baabb bbaab bbbaa

ababb babab bbaba

abbba babba

Имеем 10 перестановок. •

Теперь рассмотрим случай, когда из n-элементного множества требуется выбрать лишь часть элементов и расположить их в некотором порядке.

Упорядоченная комбинация, содержащая m элементов, выбранных из n-элементного множества, называется *размещением из n элементов по m элементов* (или, сокращенно, *размещением из n по m*).

В общем случае, некоторые из выбранных m элементов могут совпадать. Иногда бывает нужно рассмотреть размещения, в которых все элементы попарно различны. Поэтому, если в наборе могут встретиться повторяющиеся элементы, принято говорить, что рассматривается набор с повторениями (правильнее было бы говорить о наборе с возможным повторением элементов). Если при составлении набора берутся попарно различные элементы, то говорят, что рассматривается комбинация без повторений.

Пример 2.1.3. Дано множество $S=\{2,3,4,5\}$. Составим всевозможные размещения с повторениями из 4 по 3:

222 232 242 252 322 332 342 352 422 432 442 452 522 532 542 552
223 233 243 253 323 333 343 353 423 433 443 453 523 533 543 553
224 234 244 254 324 334 344 354 424 434 444 454 524 534 544 554
225 235 245 255 325 335 345 355 425 435 445 455 525 535 545 555

В первых четырех столбцах приведены размещения, первая цифра которых равна 2, затем идут четыре столбца чисел, первая цифра которых равна 3 и т. д.

Всего получаем 64 размещения с повторениями. Размещений без повторений из 4 по 2 всего 24 (они подчеркнуты).

Каждое из приведенных размещений взаимно однозначно определяет трехзначное число, составленное из цифр 2, 3, 4, 5. Однако если в размещении на первом месте стоит 0, то, например, различные размещения по 3 и по 4 элемента 023 и 0023 определяют одно и то же двузначное число. •

В заключение пункта сформулируем определения рассмотренных видов упорядоченных комбинаций на языке теории множеств.

Перестановкой из n элементов называется упорядоченная n-ка, составленная из n различных элементов.

Перестановкой из n элементов состава $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$, где $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$, называется упорядоченная n-ка, в которой имеется n_1 элемент первого типа, n_2 элемента второго типа, …, n_k элементов k-го типа.

Размещением с повторениями из n по m называется любая упорядоченная m-ка, составленная из n-элементного множества.

Размещением без повторений из n по m (или, как часто говорят, просто «*размещением из n по m*») называется любая упорядоченная m-ка, составленная из попарно различных элементов n-элементного множества.

В частности, размещение без повторений из n по n есть перестановка из n элементов.

Напомним, что упорядоченная n-ка с попарно различными элементами представляет собой n-элементное множество с заданным на нем линейным порядком.

10.2. Формулы для подсчета

Пусть фиксировано множество, из которого составляются перестановки и размещения. Из данных выше определений следует, что число комбинаций не зависит от природы элементов данного множества, а определяется лишь числом его элементов, длиной составляемых комбинаций и, возможно, указанием кратности повторений.

Введем принятые в математике обозначения.

P_n – это число всех перестановок данного n-элементного множества.

$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ – число всех перестановок с повторениями указанного состава. Каждая такая перестановка содержит k различных элементов.

A_n^m – число всех размещений (без повторений) из n по m.

$\overline{A}_n^m$ – число всех размещений с повторениями из n по m.

Получим формулу для числа $\overline{A}_n^m$. На каждую позицию размещения можно записать один из n элементов данного множества. Всего имеем m позиций. Значит, записать на m позиций по одному элементу можно $n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^m$ числом способов. Имеем формулу

$$\overline{A}_n^m = n^m. \quad (1)$$

Пример 10.2.1. Число строк таблицы истинности формулы, содержащей k переменных, равно 2^k, так как каждой строке соответствует ровно одно размещение с повторениями из двух элементов множества $\{и,л\}$ по k элементов. •

Пусть требуется найти число упорядоченных наборов, все элементы которых различны. В этом случае на первую позицию можно поставить один из m элементов, на вторую – один из $(m–1)$ элементов (элемент, выбранный на первом шаге, использовать нельзя), на третью позицию можно поставить уже один из $(m–2)$ элементов (два ранее выбранных элемента не рассматриваются) и т. д. Таким образом, по принципу умножения получаем произведение m множителей, так как выполняется m действий, при этом первый множитель равен n, а каждый последующий на единицу меньше предыдущего.

$$A_n^m = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots}_{m \text{ множителей}} \quad (2)$$

Пример 10.2.2. Вычислим A_7^3. Для этого составим произведение из трех множителей по указанному выше правилу: 7·6·5=210. •

Пример 10.2.3. Научное общество состоит из 20 человек. Надо выбрать президента общества, вице-президента, секретаря и казначея. Сколькими способами можно сделать этот выбор, если каждый член общества может занимать лишь один пост?

Будем последовательно выбирать четырех человек, первый из которых будет президентом, второй – вице-президентом, третий – секретарем, четвертый – казначеем. Имеем размещение из 20 по 4. Число способов сделать указанный выбор равно числу $A_{20}^4 = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 = 116280$.

Заметим, что если, например, должности секретаря и казначея может занимать один человек, то указанное соответствие между группой выбранных людей (которая в этом случае может состоять из трех человек) и размещением из 20 по 4 не является взаимно однозначным, поэтому число способов выбора будет другим. •

Чтобы вычислить число размещений по сформулированному правилу, можно не задумываться о том, какой вид имеет последний множитель. Однако для того, чтобы записать формулу (2) в более красивом виде, выразим последний множитель через n и m. Он будет равен (n–(m–1)) или (n–m+1). Преобразуем правую часть равенства (2), умножив и разделив ее на выражение (n–m)! Напомним, что при любом натуральном значении a выражение a! обозначает произведение всех натуральных чисел, не превосходящих a (взятых по одному разу), и называется *факториалом числа a*. После указанного преобразования правая часть равенства будет иметь точно такое же числовое значение, но представится в виде дроби: в числителе будет стоять произведение всех натуральных чисел от 1 до n, то есть n!, а знаменатель будет равен (n–m)!. Таким образом, имеем формулу:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \quad (2')$$

Проиллюстрируем формулу на примере:

$$A_7^3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{7!}{4!}$$

Найдем число всех перестановок из n элементов. Рассуждения точно такие же, как при подсчете числа размещений без повторений. На последнюю n-ю позицию перестановки остается для выбора один-единственный элемент, поэтому произведение имеет вид $n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$. Итак, имеет место формула:

$$P_n = n! \quad (3)$$

Удобно считать, что 0! равен 1. В этом случае формула (3) является частным случаем формулы (2′) при $n=m$.

Пример 10.2.4. Сколькими способами можно расставить на полке 6 томов сочинений некоторого автора?

Каждая расстановка соответствует перестановке 6-й степени. Всего имеем 6!=720 расстановок книг.

Из данной задачи можно получить множество других задач, уточняя, какие способы расстановки считать различными. Иногда симметричные расстановки считаются одинаковыми. Например, одинаковыми можно считать такие перестановки: 123456 и 654321, так как они не нарушают порядок следования томов. В этом случае имеем не взаимно однозначное соответствие между интуитивным понятием расстановки объектов и математическим понятием перестановки. Чтобы решить подобного рода задачи, нужно вначале четко определить, какие расстановки считаются одинаковыми. •

Перейдем к нахождению числа $P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k)$. Обозначим это число через x.

Рассмотрим такую произвольную перестановку и предположим, что все ее n элементов различны (например, закрасим элементы в разные цвета). Тогда число «новых» перестановок из n различных элементов равно n! Найдем это число другим способом.

Выполним последовательность действий: возьмем произвольную «старую» перестановку (это можно сделать x способами), затем расположим элементы первого типа в каком-то порядке (то есть рассмотрим перестановку из n_1 элементов, это можно сделать $n_1!$ способами), потом расположим элементы второго типа в каком-то порядке (то есть рассмотрим перестановку из n_2 элементов, это можно сделать $n_2!$ способами) и т. д. В результате такой последовательности действий будут перебраны все «новые» перестановки. По правилу произведения указанные действия можно осуществить $x\cdot n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!$ числом способов.

Таким образом, $n! = x \cdot n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!$. Выражая из этого равенства x, получаем формулу:

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!} \quad (4)$$

Пример 10.2.5. В примере были получены все перестановки состава (2,3), составленные из элементов a и b. Найдем число перестановок по формуле (4):

$$P_5(2,3) = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5}{2 \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10. \bullet$$

Пусть дано некоторое слово. Произвольная перестановка букв слова называется его *анаграммой*.

Пример 10.2.6. Найдем число анаграмм слова МАТЕМАТИКА.

Для этого сосчитаем число перестановок букв М, А, Т, Е, И, К состава (2,3,2,1,1,1). Имеем:

$$P_{10}(2,3,2,1,1,1) = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} = 151200. \bullet$$

Используя комбинаторные рассуждения, получим алгоритм, позволяющий находить коэффициенты многочлена, получаемого после раскрытия скобок и приведения подобных членов выражения $(x_1+x_2+\ldots+x_k)^n$, где n – натуральное число.

Для того чтобы представить выражение $(x_1+x_2+\ldots+x_k)^n$ в виде многочлена, нужно перемножить n выражений, равных $x_1+x_2+\ldots+x_k$. После этого получится сумма одночленов вида $x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{n_k}$, при этом некоторые одночлены будут подобны. С учетом того, что коэффициенты перед одночленами после раскрытия скобок равны 1, подобные одночлены являются равными слагаемыми.

Пример 10.2.7. Рассмотрим выражение $(x_1+x_2+x_3)^3$. Имеем:

$$(x_1+x_2+x_3)^3 = (x_1+x_2+x_3) \cdot (x_1+x_2+x_3) \cdot (x_1+x_2+x_3).$$

После перемножения скобок в силу правила произведения получится $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ слагаемых. Каждое слагаемое можно отождествить с упорядоченной тройкой, первая координата которой выбирается из первой скобки, вторая – из второй скобки, третья – из третьей скобки. Некоторые из троек определяют равные слагаемые, так как порядок множителей в произведении не изменяет выражение.

Например, слагаемых, равных $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$, будет 6: $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$, $x_1 \cdot x_3 \cdot x_2$, $x_2 \cdot x_1 \cdot x_3$, $x_2 \cdot x_3 \cdot x_1$, $x_3 \cdot x_1 \cdot x_2$, $x_3 \cdot x_2 \cdot x_1$. Слагаемых, равных, $x_1^2 x_2$, будет 3: $x_1 \cdot x_1 \cdot x_2$, $x_1 \cdot x_2 \cdot x_1$, $x_2 \cdot x_1 \cdot x_1$. •

Из рассмотренного примера видно, что число слагаемых, равных произведению $x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{n_k}$ при фиксированных значениях n_1, n_2, …, n_k, равно числу перестановок состава $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$, составленных из переменных x_1, x_2, …, x_k. Сумма чисел n_1, n_2, …, n_k равна n. Если какое-то из чисел n_i равно 0, то соответствующая переменная x_i не входит в перестановку. При этом количество не подобных слагаемых будет столько, сколькими способами число n можно представить в виде суммы k целых неотрицательных слагаемых с учетом порядка следования слагаемых.

Возвращаясь к примеру 10.2.7, видим, что $3 = 3+0+0 = 2+1+0 = 2+0+1 = 1+2+0 = 1+1+1 = 1+0+2 = 0+3+0 = 0+2+1 = 0+1+2 = 0+0+3$.

Подсчитав соответствующее число перестановок, имеем следующее разложение выражения $(x_1+x_2+x_3)^3$:

$$x_1^3 + 3x_1^2 x_2 + 3x_1^2 x_3 + 3x_1 x_2^2 + 6x_1 x_2 x_3 + 3x_1 x_3^2 + x_2^3 + 3x_2^2 x_3 + 3x_2 x_3^2 + x_3^3.$$

Пример 10.2.8. Найдем коэффициент при многочлене $x^2y^3z^5$ после возведения в степень и приведения подобных членов выражения $(x+y+z)^{10}$.

Коэффициент равен числу перестановок

$$\overline{P}_{10}(2;3;5) = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 5!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 2520. \bullet$$

§ 11. Сочетания

Рассмотрим наборы, в записи которых порядок следования элементов не имеет значения. В комбинаторике такие наборы называются сочетаниями.

11.1. Определения и примеры

Неупорядоченная комбинация, содержащая m элементов, выбранных из n-элементного множества, называется *сочетанием из n элементов по m элементов* (или, сокращенно, *сочетанием из n по m*).

Если выбираются попарно различные элементы, то комбинация называется сочетанием без повторений. Если при составлении наборов допускается повторение элементов, то говорят, что рассматривается сочетание с повторениями.

Так как порядок элементов в наборе не имеет значения, то сочетания отличаются только составом элементов. Например, сочетание 2,2,4 имеет следующий состав: две цифры 2 и одна цифра 4. Поэтому набор 2,4,2 определяет то же самое сочетание. Набор 2,4,4 определяет другое сочетание (его состав: одна цифра 2 и две цифры 4).

Пример 11.1.1. Дано множество $S=\{2,3,4\}$. Запишем все сочетания с повторениями из 3 по 3.

2,2,2

2,2,3 2,2,4

2,3,3 2,3,4 2,4,4

3,3,3 3,3,4 3,4,4 4,4,4

В первой строке записаны все сочетания, в которых цифра 2 встречается три раза, во второй строке – сочетания, в которых цифра 2 встречается 2 раза и т. д.

Среди всех комбинаций имеется только одно сочетание без повторений – 2,3,4 (каждая цифра записана по одному разу). •

Пусть дано множество S. Рассмотрим его произвольное сочетание без повторений, то есть неупорядоченный набор различных элементов множества S. Такой набор однозначно определяет некоторое подмножество множества S. И наоборот, любое подмножество в S может быть рассмотрено как сочетание.

Поэтому, используя язык теории множеств, можно сказать, что *сочетание без повторений из n по m – это произвольное m-элементное подмножество n-элементного множества*.

Очень часто вместо слов «сочетание без повторений» говорят просто «сочетание».

Пример 11.1.2. Пусть $S=\{1,2,3,4,5\}$. Найдем все сочетания (без повторений) из 5 по 3. Для этого составим всевозможные трехэлементные подмножества.

Подмножество можно представить в виде комбинации цифр, записанных в порядке возрастания, так как изменение порядка следования элементов не изменит подмножество. Организуем перебор:

1,2,3 1,2,4 1,2,5 1,3,4 1,3,5 1,4,5

2,3,4 2,3,5 2,4,5

3,4,5

Имеем 10 сочетаний. •

11.2. Число сочетаний без повторений и его свойства

Пусть фиксировано n-элементное множество. Обозначим число всех сочетаний без повторений из n по m через C_n^m. Договоримся в дальнейшем слова «без повторений» опускать.

Вначале рассмотрим некоторые частные случаи.

$C_n^1 = n$, так как существует ровно n одноэлементных подмножеств n-элементного множества (каждый элемент порождает такое подмножество).

$C_n^n = 1$, так как только само n-элементное множество является n-элементным подмножеством.

$C_n^0 = 1$, так как любое множество имеет ровно одно 0-элементное подмножество – пустое.

Можно также считать, что $C_n^m = 0$ при $m>n$, так как в этом случае не существует ни одного подмножества, содержащего элементов больше, чем в самом множестве.

Используя идею, рассмотренную в примере 11.1.2, можно сосчитать число двухэлементных подмножеств фиксированного множества. Занумеруем элементы множества $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Будем записывать подмножества как наборы по 2 элемента в порядке увеличения номеров. В первой строке оставим наборы вида a_1a_i, где i принимает значения от 2 до n (таких наборов будет (n–1)), во второй строке – наборы вида a_2a_i, где i принимает значения от 3 до n (таких наборов будет (n–2)). Продолжая данный процесс, получим (n–1) строку, в последней из которых будет записан один набор – $a_{n-1}a_n$.

Так как в каждой строке имеется на один набор меньше, чем в предыдущей, то общее число наборов будет равно сумме всех натуральных чисел от n–1 до 1:

$$(n-1)+(n-2)+\ldots+2+1 = \frac{(n-1)+1}{2}\cdot(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Таким образом, $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Пример 11.2.1. Построим все сочетания из элементов множества $\{a, b, c, d\}$ по 2 элемента.

$ab \quad ac \quad ad$

$bc \quad bd$

cd •

Для того чтобы получить общую формулу для подсчета числа сочетаний, можно использовать разные приемы. Проведем рассуждения, которые позволяют получить формулу, связывающую число сочетаний с числом размещений.

Обозначим C_n^m через x. Подсчитаем число всех размещений A_n^m способом, не опирающимся на выведенную в параграфе 10 формулу. Все размещения из n по m можно получить, выполнив последовательно два действия. Первое действие – выбираем m-элементное подмножество, что можно сделать x способами. Второе действие – упорядочиваем выбранное подмножество, то есть рассматриваем произвольную перестановку из выбранных элементов, что можно сделать $m!$ способами. Тогда по правилу произведения получаем, что число всех размещений A_n^m равно $x \cdot m!$. Итак, $A_n^m = C_n^m \cdot m!$. Учитывая формулу (2) пункта 10.2, получаем следующую формулу для вычисления числа сочетаний:

$$C_n^m = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(m-1))}{m!}. \quad (5)$$

При применении формулы (5) важно понимать, что в числителе дроби присутствует m множителей.

Пример 11.2.2. $C_5^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2} = 10$, $C_8^4 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 7 \cdot 2 \cdot 5 = 70$. •

Заметим, что при выполнении вычислений нет необходимости представлять числитель и знаменатель в виде чисел. Часто бывает удобно оставить числитель и знаменатель в виде произведения множителей, а затем произвести необходимые сокращения, что упростит процесс вычислений.

Пример 11.2.3. Найдем, сколькими способами из 11 мальчиков класса можно выбрать двух дежурных.

Группу из двух человек можно представить как сочетание по 2 элемента, так как группы, составленные из одних и тех же людей, равны. Например, два мальчика Коля и Петя определяют одну группу, неважно, в каком порядке их расположить: «Коля, Петя» или «Петя, Коля». Из контекста задачи также ясно, что выбор двух человек предполагает выбор двух разных людей. Поэтому число способов равно $C_8^2 = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$. •

Пример 11.2.4. Решим задачу из примера 9.5.4. Количество способов выбрать из 6 человек трех членов культурно-массовой комиссии равно $C_6^3 = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 20$. •

Оказывается, число сочетаний можно найти, воспользовавшись формулой для числа перестановок с заданной кратностью элементов. Воспользуемся представлением подмножества в виде упорядоченного набора нулей и единиц, рассмотренным в примере 9.5.2. Каждое m-элементное подмножество можно отождествить с упорядоченной n-ой, содержащей m единиц и $n–m$ нулей. Напомним, единица означает, что соответствующий элемент входит в подмножество. Например, набор 00110 задает для пятиэлементного множества двухэлементное подмножество, в которое входят третий и четвертый элементы исходного множества (элементы исходного множества каким-то образом занумерованы).

Значит, число m-элементных подмножеств равно числу перестановок элементов 1, 0 состава $(m,n–m)$, то есть $C_n^m = P_n(m, n-m)$, что, в свою очередь, равно $\dfrac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$. Таким образом, имеет место формула:

$$C_n^m = P_n(m, n-m) = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}. \quad (5')$$

Эту же самую формулу можно получить, подставив в формулу (5) формулу (2′) из предыдущего параграфа.

Итак, к подсчету числа сочетаний можно приступить с разных позиций. Однако заметим, что для вычислений лучше всего применять формулу (5), так как в формуле (5′) присутствуют лишние множители, которые, после того как будут расписаны факториалы, все равно сокращаются.

Формулу (5′) удобно применять для доказательства тождеств, связанных с числом сочетаний.

Рассмотрим основные тождества, справедливые для всех целых неотрицательных чисел n и m, таких, что $n \geq m$.

1°. $C_n^m = C_n^{n-m}$.

Это равенство очевидным образом вытекает из формулы (5′): подставим в формулу вместо числа m число $n–m$, правая часть не изменится в силу коммутативности операции умножения.

Это равенство вытекает и из других соображений. Дело в том, что любое m-элементное подмножество A исходного множества взаимно однозначно порождает $(n–m)$-элементное подмножество – дополнение A.

Пример 11.2.5. Проиллюстрируем указанную идею на примере равенства $C_5^3 = C_5^2$. Для каждого сочетания из элементов множества $S = \{1,2,3,4,5\}$ по три элемента укажем соответствующее ему сочетание по два элемента (вычеркиванием из S записанной тройки элементов):

1,2,3↔4,5 1,2,4↔3,5 1,2,5↔3,4 1,3,4↔2,5 1,3,5↔2,4 1,4,5↔2,3

2,3,4↔1,5 2,3,5↔1,4 2,4,5↔1,3

3,4,5↔1,2 •

Данное свойство удобно применять для упрощения вычислений в случае, когда разность $n–m$ меньше m.

Пример 11.2.6. Если вычислять C_{11}^8 непосредственно по формуле (5), то придется вначале записать $C_{11}^8 = \dfrac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}$.

По свойству 1° имеем: $C_{11}^8 = C_{11}^{11-8} = C_{11}^3 = \dfrac{11\cdot 10\cdot 9}{3\cdot 2} = 11\cdot 5\cdot 3 = 165$. •

2°. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$.

Так как число C_n^m означает количество m-элементных подмножеств n-элементного множества, то левая часть равенства равна количеству всех подмножеств, а их, как известно (пример 9.5.2), ровно 2^n.

3°. $C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$.

Это равенство можно доказать, используя формулу (5′) и основные свойства факториала (например, $(m+1)!=m!\cdot(m+1)$). Проделайте эту процедуру самостоятельно.

Докажем указанное свойство, используя комбинаторный принцип сложения.

Пусть дано $(n+1)$-элементное множество S. Обозначим через X семейство его $(m+1)$-элементных подмножеств. С одной стороны, $|X| = C_{n+1}^{m+1}$. Сосчитаем это число другим способом.

Выберем и зафиксируем в S элемент a. Разобьем множество X на два класса. В первый класс отнесем все $(m+1)$-элементные подмножества, не содержащие a; таких подмножеств C_n^{m+1}, так как они выбираются из n-элементного множества $S\setminus\{a\}$. Во второй класс отнесем все (m+1)-элементные подмножества, содержащие a. Каждое такое подмножество имеет вид $B\cup\{a\}$, где B – m-элементное подмножество в $S\setminus\{a\}$. Поэтому подмножеств вида $B\cup\{a\}$ ровно C_n^m. Таким образом, $|X| = C_n^{m+1} + C_n^m$. Равенство 3° доказано.

Пример 11.2.7. Пусть S={1,2,3,4,<u>5</u>}, n+1=5, m+1=3. Выделим элемент a=<u>5</u>. Тогда в первый класс попадут трехэлементные подмножества множества {1,2,3,4}, их C_4^3. Во второй класс попадут подмножества с цифрой <u>5</u>: {1,2,<u>5</u>}, {1,3,<u>5</u>}, {1,4,<u>5</u>}, {2,3,<u>5</u>}, {2,4,<u>5</u>}, {3,4,<u>5</u>}. Их число равно C_4^2.

Итак, $C_5^3 = C_4^3 + C_4^2$. •

Рассмотренное свойство позволяет находить число сочетаний так называемым рекуррентным способом, то есть на основе предыдущих значений. Например, зная последовательность чисел C_n^m для всех значений m от 0 до n, можно последовательно найти значения C_{n+1}^m для всех m от 0 до n. Занесем значения C_n^m для первых значений n и m в таблицу. Пронумеруем строки числами от 0 до 5 и столбцы числами от 0 до 5. Тогда в клетке, находящейся в n-й строке и столбце с номером m, будет записано число C_n^m, которое равно сумме чисел, записанных в предыдущей строке, одно из которых находится в этом же столбце, а другое в предыдущем столбце. Например, число C_5^2 равно сумме чисел 4 и 6.

n \ m	0	1	2	3	4	5
0	**1**					
1	**1**	**1**				
2	**1**	**2**	**1**			
3	**1**	**3**	**3**	**1**		
4	**1**	**4**	**6**	**4**	**1**	
5	**1**	**5**	**10**	**10**	**5**	**1**

Ясно, что таблицу можно неограниченно продолжать.

В незаполненных клетках таблицы можно мыслить нули в силу свойства $C_n^m = 0$ при m>n. Не учитывая эти нули, таблица имеет треугольный вид. Таблицу называют *треугольником Паскаля* по имени французского математика Блэза Паскаля (1623–1662), в трудах которого она встречается. Однако такую таблицу знали уже арабские математики Гиясэддин Каши (XIV–XV вв.) и Омар Хайям (1048–1131).

В пункте 10.2 был получен алгоритм, позволяющий вычислять коэффициенты многочлена, полученного после возведения в n-ю степень суммы $x_1+x_2+\ldots+x_k$, где $k\geq 2$. Наибольшее значение имеет формула, позволяющая находить n-ю степень двучлена $x+y$. Напомним, что из школьного курса математики известны два частных случая общей формулы:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2,$$
$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.$$

Видно, что коэффициенты приведенных разложений записаны в строках треугольника Паскаля, соответствующих значениям $n=2$ и $n=3$. Оказывается, это свойство справедливо при любых натуральных n. Итак, имеет место следующая формула.

4°. *Бином Ньютона*:

$$(x+y)^n = x^n + C_n^1x^{n-1}y + C_n^2x^{n-2}y^2 + \ldots + C_n^{n-2}x^2y^{n-2} + C_n^{n-1}xy^{n-1} + y^n.$$

Докажем формулу. Требуется показать, что коэффициент при одночлене $x^{n-i}y^i$ равен C_n^i. Из пункта 10.2 известно, что искомый коэффициент равен числу перестановок состава $(n-i, i)$. Используя формулу (5′), имеем $\overline{P}_n(n-i,i) = \overline{P}_n(i,n-i) = C_n^i$.

Пример 11.2.8. Применяя формулу бинома Ньютона и построенный треугольник Паскаля, представим в виде многочлена выражение $(x+y)^5$. Имеем:

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5. \bullet$$

Пример 11.2.9. Найдем коэффициент при одночлене x^6y^5 разложения $(x^2-2y)^8$.

Обозначив $a=x^2$, $b=-2y$, получим $(a+b)^8$. Тогда одночлен cx^6y^5 будет равен $ca^3(-0{,}5b)^5 = (-0{,}5)^5ca^3b^5$. Коэффициент при a^3b^5 в разложении $(a+b)^8$ равен $C_8^3 = 56$. Поэтому имеем равенство $(-0{,}5)^5c = 56$. Отсюда искомый коэффициент c равен $56\cdot(-32) = -1792$. •

11.3. Число сочетаний с повторениями

Обозначим через $\overline{C}_n^m$ число всех сочетаний с повторениями из n по m.

Опишем способ нахождения этого числа. Часто при решении комбинаторных задач бывает эффективно применить именно идею решения, а не просто саму формулу. Вначале приведем рассуждения в общем виде, а затем проиллюстрируем их на конкретных примерах.

Рассмотрим n-элементное множество и занумеруем его элементы: $S=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Будем перебирать все сочетания с повторениями. Так как порядок записи элементов неважен, то вначале запишем все элементы a_1, затем все a_2 и т. д. Элементы разделяем вертикальной чертой: $a_1\ldots a_1|a_2\ldots a_2|\ldots|a_n\ldots a_n$. Такую комбинацию можно отождествить с набором нулей и единиц вида $1\ldots101\ldots10\ldots01\ldots1$, в котором n–1 нулей (нуль играет роль разделительной черты) и m единиц, так как сочетание содержит m элементов. Таким образом, число сочетаний будет равно числу перестановок, в которых цифра 0 имеет кратность (n–1), а цифра 1 – кратность m. Число таких перестановок равно

$$P_{n+m-1}(n-1,m)=\frac{(n+m-1)!}{m!\cdot(n-1)!}=C_{n+m-1}^{m}.$$

Пример 11.3.1. В примере 11.1.1 были рассмотрены все сочетания с повторениями из 3 по 3. Приведем их коды в соответствии с рассмотренной идеей, полагая a_1=2, a_2=3, a_3=4:

2,2,2↔11100

2,2,3↔11010 2,2,4↔11001

2,3,3↔10110 2,3,4↔10101 2,4,4↔10011

3,3,3↔01110 3,3,4↔01101 3,4,4↔01011 4,4,4↔00111 •

Итак, подсчет числа сочетаний с повторениями можно свести к подсчету числа сочетаний без повторений с помощью формулы:

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m \quad (6)$$

Пример 11.3.2. В магазине продают 4 сорта пирожных: заварное, белковое, «Грибок», «Ночка». Сколькими способами можно купить 8 пирожных?

Рассмотрим множество $S=\{з, б, г, н\}$, в котором каждый элемент кодирует название пирожного по первой букве. Любой выбор 8 пирожных порождает комбинацию элементов множества S, при этом порядок записи элементов не имеет значения. Например, выбрав 2 заварных пирожных, 4 белковых и по одному пирожному остальных сортов, имеем комбинацию *ззббббгн*, являющуюся сочетанием с повторениями из 4 по 8. Наоборот, любое такое сочетание однозначно дает некоторый набор пирожных. Значит, число способов купить указанное число пирожных равно $\overline{C}_4^8 = C_{11}^8 = C_{11}^3 = 165$.

Отметим, что можно было произвести подсчет не по формуле (6), а непосредственно применив процедуру, описанную при выводе этой формулы. Каждый набор из 8 пирожных можно закодировать последовательностью из 8 нулей и 3 единиц. Например, набору *ззббббгн* соответствует последовательность 11011110101, а набору *ггггнннн* – последовательность 00111101111 (заварных и белковых пирожных не выбрали ни одного). Последовательность 11110011011 однозначно определяет следующий набор пирожных: заварных – 4 штуки, «Грибков» – 2 штуки, «Ночки» – 2 штуки, белковых нет. Итак, 8 пирожных можно выбрать $P_{11}(8,3) = 165$ числом способов. •

Пример 11.3.3. В условиях предыдущего примера найдем, сколькими способами можно купить 8 пирожных при дополнительном условии: требуется купить хотя бы по одному пирожному каждого сорта.

Дополнительное условие означает, что в выборке элементов множества S заведомо должны быть элементы *з*, *б*, *г*, *н*. Уберем из выборки по одному элементу каждого типа. После этого получим сочетание, содержащее только 4 элемента из тех же 4 сортов. Число таких сочетаний $\overline{C}_4^4 = C_7^4 = C_7^3 = 35$.•

Отождествление набора объектов с последовательностью из нулей и единиц является важной идеей при решении комбинаторных задач. Этот прием часто называют *0-1 кодированием*.

Пример 11.3.4. Сколькими способами шесть одинаковых карандашей можно распределить между тремя детьми?

Так как карандаши одинаковые, то различные способы распределения карандашей между детьми будут отличаться лишь количеством карандашей у каждого ребенка. Применим идею 0-1 кодирования. Изобразим каждый карандаш цифрой 1. Получим набор из 6 единиц. Для того чтобы распределить их между тремя детьми, добавим в набор две цифры 0, что разобьет 6 единиц на три группы. Полученный набор взаимно однозначно распределяет карандаши между детьми. Например, набор 11101011 означает, что первый ребенок получил три карандаша, второй – один карандаш, а третий – два карандаша. Осталось сосчитать число наборов из двух нулей и шести единиц, число которых равно $P_8(2,6)$ или C_8^2, то есть 28.

Указанные в примере распределения карандашей также определяют сочетания с повторениями. О каких сочетаниях идет речь? Подумайте. •

Упражнение. Найдите число способов распределить шесть одинаковых карандашей между тремя детьми так, чтобы каждый ребенок получил хотя бы один карандаш.

Для того чтобы распределить шесть карандашей между тремя детьми, нам пришлось представить число 6 в виде суммы трех целых неотрицательных чисел. Обобщим эту идею.

Так как сочетание с повторениями определяется только составом элементов, то каждому сочетанию из n по m соответствует ровно одна упорядоченная n-ка $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$, сумма координат которой равна m, где i-я координата показывает, сколько раз в сочетании встречается соответствующий элемент. При этом некоторые координаты могут равняться 0, так как в сочетании могут присутствовать не все элементы исходного множества. Указанное соответствие взаимно однозначно. Поэтому число сочетаний $\overline{C}_n^m$ равно числу способов представить натуральное число m в виде суммы n целых неотрицательных чисел: $m = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$. Важно, что порядок следования слагаемых здесь существенен. Например, представления числа 7 в виде 2+3+2 и в виде 2+2+3 считаются различными.

Другими словами, число $\overline{C}_n^m$ равно числу решений уравнения $x_1+\ldots+x_n = m$ в целых неотрицательных числах.

Пример 11.3.5. Сколько решений в целых неотрицательных числах имеет уравнение $x_1+x_2+x_3+x_4=9$?

Каждое решение можно отождествить с последовательностью из 9 единиц и 3 нулей (разбивающих единицы на четыре группы). Например, решению (2,3,2,2) соответствует код 110111011011. Общее количество решений равно числу сочетаний с повторениями из 4 по 9: $\overline{C}_4^9 = C_{12}^9 = C_{12}^3 = 220$.•

Пример 11.3.6. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $x_1+x_2+x_3+x_4=9$?

Здесь можно применить идею, рассмотренную в примере 11.3.5. Заметим вначале, что каждой упорядоченной четверке (a, b, c, d) натуральных чисел соответствует четверка целых неотрицательных чисел $(a-1, b-1, c-1, d-1)$, сумма координат которых равна 9–4=5. Это соответствие взаимно однозначно, при обратном соответствии надо прибавить к каждой координате по 1. Таким образом, требуется представить число 5 в виде суммы четырех целых неотрицательных слагаемых, что можно сделать $\overline{C}_4^5 = C_8^5 = C_8^3 = 56$ способами. •

Во всех рассмотренных выше примерах задач данного пункта требовалось сосчитать число сочетаний с повторениями. Как было доказано, это число можно найти по формуле (6). Тем не менее вместо того, чтобы переводить задачу на язык сочетаний, можно напрямую воспользоваться идеей 0-1 кодирования, что было продемонстрировано в ряде примеров. В некоторых случаях задачу можно решить, не прибегая к идее кодирования или формуле (6).

Пример 11.3.7. Среди азартных игр распространена игра в домино. Кость домино представляет собой комбинацию двух чисел, образованную из 7 элементов: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Комбинации чисел неупорядоченные (1:2 и 2:1 – это одна и та же кость), при этом возможны повторения чисел (0:0, 1:1, 2:2, … – так называемые дубли). Сосчитаем, сколько всего существует костей домино.

Нетрудно видеть, что кость – это сочетание с повторениями из 7 по 2. Их число можно найти по формуле $\overline{C}_7^2 = C_8^2 = 28$.

Найдем это число другим способом. Вначале переберем все дубли: их 7. Сосчитаем количество костей, не являющихся дублями. Их число равно числу сочетаний (без повторений) из 7 по 2, то есть $C_7^2 = 21$. Всего имеем 7+21=28 костей домино. •

Упражнение. Используя принцип сложения, вычислите число $\overline{C}_7^3$. Отдельно найдите число всех сочетаний без повторений и число сочетаний, в которых есть повторяющиеся элементы.

Практикум

Упражнения к главе 1

1. Выясните, какие из следующих предложений являются высказываниями, а какие – предикатами. Для высказываний найдите их логические значения. Если предложение содержит переменные, то определите, какие переменные являются свободными, а какие – связанными. Для предикатов укажите такие значения свободных переменных, при которых предложение истинно, и такие значения переменных, при которых предложение ложно:

1) число 7 является делителем числа 717;

2) уравнение $x^2–x–2=0$ имеет корень;

3) геометрическая прогрессия с первым членом 2 и знаменателем 3;

4) p – простое число;

5) прямая $y=x$ пересекает окружность $x^2+y^2=2$ в точке (1;1);

6) прямые $y=2x$ и $y=3x$ не пересекаются;

7) объединим промежутки (3;5) и (4;8);

8) прямые l и m параллельны;

9) сумма квадратов действительных чисел a и b меньше 1;

10) сумма квадратов любых действительных чисел a и b меньше 1;

11) число 10 является членом арифметической прогрессии;

12) график функции f пересекает график функции $y=\sin x$.

2. Дано предложение: «Числа x_1 и x_2 являются корнями уравнения $x^2+3x+4=0$». Определите связанные и свободные переменные. Придайте свободным переменным такие значения, чтобы получить сначала истинное высказывание, затем ложное высказывание.

3. Объясните, что за переменные мы имеем в следующих формулах дифференцирования: $(uv)'=u'v+uv'$, $(x^2)'=2x$. В какое из равенств вместо переменных можно подставить допустимые значения? Являются ли формулы тождественно истинными? Почему?

4. Среди следующих выражений (комбинаций математических знаков) выберите термы, высказывания, предикаты. Для высказываний найдите их логические значения:

1) $x^2–x–2=0$; 2) $2x+y$; 3) $x+(3>2)$;

4) $A\cup B$, здесь переменные A и B обозначают промежутки числовой прямой, $\cup$ – знак объединения;

5) $\int\limits_0^1 x\mathrm{d}x = 1$; 6) $1^3+2^3+3^3+4^3=(1+2+3+4)^3$;

7) 15:4; 8) $15\vdots4$; 9) $36\vdots9$; 10) НОД(24,16)=8; 11) $\log_3 6 = 2$.

12) $(1;5)\cap(7;9)=\varnothing$, $\cap$ – знак пересечения, $\varnothing$ – пустое множество.

5. Какие из следующих формул являются тождественно истинными (укажите допустимые значения):

1) $x^2-(x-1)(1+x)=1$; 2) $\sin(x+y)=\sin x+\sin y$; 3) $f'+g'=(f+g)'$;

4) $\dfrac{x+y}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}=xy$; 5) $\dfrac{x}{y}+\dfrac{z}{t}=\dfrac{x+z}{y+t}$; 6) $x^2+10>6x$;

7) $(ab)\vdots a$; 8) $1\,|\,a$; 9) $(a+b)\vdots a$; 10) $xy=yx$?

Здесь x, y, z, t – переменные по множеству действительных чисел, a, b – по множеству целых чисел, f, g – по множеству функций.

6. Выделите простые высказывания и логические связки между ними. Запишите исходные предложения символически. Найдите их значения.

а) число (–14) четное и отрицательное;

б) число $1-\sqrt{2}$ отрицательное или рациональное;

в) число $1-\sqrt{2}$ отрицательное и рациональное;

г) если число $1-\sqrt{2}$ рациональное, то оно положительное;

д) число $\log_{0,2} 5$ положительное или иррациональное.

7. Обозначим буквой A предложение «Четырехугольник имеет две равные стороны», а буквой B – предложение «Четырехугольник имеет два равных угла». Прочитайте предложения по их символической записи:

$$\rceil A,\ A\vee B,\ A\wedge B,\ A\to B.$$

Пусть дан четырехугольник с попарно различными сторонами. Определите значение предложения $A\to B$.

Приведите пример четырехугольника, для которого предложение $A\to B$ неверно.

8. Даны высказывания трех мальчиков.

Петя: «Я пойду в театр или в кино».

Вася: «Я сдам экзамены по математике и по физике».

Андрей: «Если я сдам экзамен по математике, то пойду в театр».

Известно, что каждый мальчик не сдержал обещание. Сделайте выводы.

9. Задумано натуральное число. Вася и Петя высказали по одному утверждению.

Петя: «Если число нечетное, то оно меньше 15».

Вася: «Если число составное, то оно четное».

Известно, что высказывание Пети истинно, а высказывание Васи ложно. Какое число задумано?

10. К каждому из следующих предикатов с натуральной переменной n примените сначала квантор общности, а затем квантор существования:

1) n – простое число; 2) $n \geq 1$; 3) $n \vdots 5$.

Сформулируйте полученные высказывания и выясните, какие из них истинны.

11. Запишите символически каждое из следующих предложений, выявите в нем свободные и связанные переменные:

1) существует такое число x, что x больше y;

2) для любого числа y верно, что x больше y;

3) существуют такие числа x и y, что x больше y;

4) каковы бы ни были числа x и y, x больше y;

5) для всякого числа x найдется такое число y, что x больше y;

6) существует такое число y, что для любого числа x верно, что x больше y.

Здесь x и y – действительные переменные.

12. Запишите символически следующие предложения:

1) существует число, равное своему квадрату;

2) четвертая степень любого числа неотрицательна;

3) неравенство $2^x > 3$ верно хотя бы для одного числа x;

4) куб некоторого числа равен 7;

5) неравенство $2^x > 0$ верно для всякого числа x.

Докажите истинность этих высказываний.

13. Прочитайте следующие предложения разными способами (вначале используя в формулировке переменную x, затем без указания этой переменной):

1) $\exists x(x^2<1)$, 2) $\forall x(\sin x<1)$, 3) $\exists x(\sin x<1)$, 4) $\exists x(\sin x>1)$, 5) $\forall x(x^2 \geq 0)$.

Какие из высказываний истинны? Обоснуйте.

14. Прочитайте следующие высказывания и выясните, какие из них верны:

1) $\forall x\ (x>4 \to x^2>10)$, 2) $\forall x\ (x>4 \to x^2>10)$,

3) $\forall x\ (x>1 \lor x<2)$, 4) $\exists x\ (x<1 \land x>2)$.

При формулировке постарайтесь не использовать переменную.

15. Для предложения $x \geq y$ запишите символически результаты всех возможных вариантов применения кванторов по двум переменным (восемь вариантов). Прочитайте полученные высказывания и выясните, истинны ли они, если переменные x и y могут принимать:

а) действительные значения; б) натуральные значения.

Постарайтесь прочитать высказывания, не используя буквы x и y.

16. Для предложения $x \,\vdots\, y$ запишите символически результаты всех возможных вариантов применения кванторов по двум переменным. Прочитайте полученные высказывания и выясните, истинны ли они. Буквы x и y – это переменные по множеству целых чисел.

17. Прочитайте, не используя буквы a и b, следующие предложения и выясните, какие из них верны:

1) $\exists a \exists b (a \| b)$ 2) $\forall a \forall b (a \| b)$ 3) $\forall a \exists b (a \| b)$ 4) $\exists a \forall b (a \| b)$.

Переменные a и b обозначают прямые.

18. Запишите символически следующие предложения и проанализируйте их:

1) для любого числа a существует число, синус которого равен a;

2) для любого числа a существует число, равное синусу a;

3) существует число a, такое, что синус любого числа будет равен a;

4) существует число a, такое, что синус любого числа будет меньше a.

19. Даны предложения о числовой функции f. Приведите пример такой функции, для которой предложение истинно, и пример функции, для которой оно ложно.

1) $\exists x\ \forall t > x\ [f(t) = 0]$,

2) $\forall x\ \exists t > x\ [f(t) = 0]$,

3) $\forall a\ \forall b\ [a = b \to f(a) = f(b)]$,

4) $\exists a\ \forall x\ [f(a) \leq f(x)]$,

5) $\exists a\ \forall x\ [f(a) < f(x)]$,

6) $\forall x\ \forall y\ [f(x) = f(y) = 0 \to x = y]$.

20. Даны следующие функции:

$$f_1(x) = \sin x,\ f_2(x) = x^3,\ f_3(x) = |x|,\ f_4(x) = \operatorname{tg} x,\ f_5(x) = \frac{1}{x},\ f_6(x) = \{x\},$$

где $\{x\}$ обозначает дробную часть числа x. Найти все функции, для которых верно предложение:

а) $\forall c\ \exists x\ [f(x) > c]$;

б) $\forall a \in D_f\ \exists b > a\ [f(b) \geq f(a)]$.

21. Запишите следующие предложения о числовой функции f символически, используя кванторы. Приведите пример функции, для которой предложение верно, и пример функции, для которой оно ложно.

1) Любое действительное число является значением функции f.

2) Ни одно положительное число не является значением функции f.

3) Разным значениям аргумента соответствуют разные значения функции.

4) Функция f принимает постоянное значение при всех значениях аргумента из отрезка $[2; 3]$.

5) Функция f ограниченна на промежутке $(0; 1)$.

6) Функция f на интервале $(0; 1)$ принимает только отрицательные значения.

7) Функция f может принимать отрицательные значения только в точках интервала $(0; 1)$.

22. Установите между предикатами, если возможно, отношение следования:

а) $x \vdots 15$ и $x \vdots 5$; б) $x \geq y$ и $x > y$; в) $(x>10) \vee (y>10)$ и $x+y>20$;

г) «четырехугольник x есть ромб» и «диагонали четырехугольника x перпендикулярны»;

д) «углы x и y вертикальные» и «углы x и y равны».

23. Каким условием (необходимым или достаточным) является A для B?

а) A = «x – прямоугольник», B = «Диагонали x равны»;

б) A = «Прямая a параллельна b, а прямая b параллельна c», B = «Прямая a параллельна c»;

в) A = «Треугольник прямоугольный», B = «Один из углов треугольника равен сумме двух других».

24. Вставьте вместо многоточия одно из словосочетаний «необходимо, но не достаточно», «достаточно, но не необходимо», «не необходимо и не достаточно», «необходимо и достаточно» так, чтобы получилось истинное высказывание. Обоснуйте выбор.

а) Для того чтобы в четырехугольник можно было вписать окружность, … , чтобы это был ромб.

б) Для того чтобы четырехугольник был параллелограммом, … , чтобы его диагонали точкой пересечения делились пополам.

в) Для того чтобы две прямые были параллельными, … , чтобы они лежали в одной плоскости.

г) Для того чтобы выполнялось неравенство $x^2>y^2$, … , чтобы число x было больше числа y.

д) Для того чтобы выполнялось равенство $x^2=y^2$, … , чтобы число x было равно числу y.

е) Для того чтобы целое число делилось на 48, … , чтобы это число делилось на 8 и на 6.

25. Вставьте вместо многоточия один из математических терминов так, чтобы получилось верное утверждение.

а) Равенство площадей фигур является … условием для того, чтобы фигуры были равны.

б) Равенство $x^2+x=y^2+y$ является … условием для того, чтобы числа x и y были равны.

в) Равенство $ab=0$ является … условием для того, чтобы $a=0$.

г) Неравенство $x>1$ является … условием для неравенства $x^2>1$.

26. Выделите в следующих предложениях простые высказывания, обозначьте их буквами и представьте данные предложения в виде формул:

а) число 13^5+5 делится на 11 и на 19;

б) если дробь $\dfrac{6789}{12345}$ несократима, то или ее числитель, или ее знаменатель не делится на 13;

в) если сегодня не выходной день, то Коля идет в школу, если у него нет высокой температуры;

г) если число x меньше числа y, то если эти числа одного знака, то $\dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{y}$, а если они разных знаков, то $\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{y}$;

д) если произведение целых чисел x и y делится на простое число p и не делится на p^2, то одно из чисел x, y делится на p, а другое на p не делится.

27. Найдите все наборы значений переменных, при которых формула

$$(A\vee B)\to((A\wedge \urcorner B)\vee(\urcorner A\wedge B))$$

принимает значение лжи.

28. Найдите все наборы значений переменных, при которых формула

$$(A\vee B)\to(\urcorner(B\wedge C)\leftrightarrow A\wedge B)$$

принимает значение истины.

29. Докажите, что следующие формулы являются тавтологиями:

1) $A\to(B\to A)$ 2) $(A\to B)\wedge(A\to \urcorner B)\to \urcorner A$ 3) $(A\vee B\to C)\to(A\to C)$.

30. Докажите равносильность следующих формул:

1) $A \vee B$ и $\rceil A \to B$ 2) $A \to (B \to C)$ и $A \wedge B \to C$.

31. Приведите пример предложений A и B, чтобы формула $(A \to B) \wedge \rceil A \to \rceil B$ приняла ложное значение. Сформулируйте предложение, выраженное этой формулой.

32. Проверьте, равносильны ли следующие пары формулы. Если нет, приведите пример предложений, при которых одна из формул принимает значение истины, а другая – значение лжи:
1) $A \to B$ и $B \to A$ 2) $A \leftrightarrow B$ и $\rceil A \leftrightarrow \rceil B$.

33. На вопрос, кто из студентов изучал математику в вузе, был получен верный ответ: «Если Андрей изучал математику, то и Сережа изучал математику, но неверно, что если Володя изучал математику, то изучал ее и Сережа». Запишите предложение формулой. Исходя из истинности данного предложения, определите, кто изучал математику, а кто нет.

34. Даны следующие предикаты:
$A(x)$ = «x – положительное число»,
$C(x)$ = «x – четное число»,
$N(x)$ = «x – натуральное число»,
$Z(x)$ = «x – целое число»,
$P(x)$ = «x – простое число»,
$B(x,y)$ = «x больше y».
Прочитайте предложения, заданные формулами, и выясните, какие из них верны:
1) $\forall x\, (N(x) \to Z(x))$ 2) $\forall x\, (Z(x) \to N(x))$ 3) $\forall x\, (Z(x) \wedge A(x) \leftrightarrow N(x))$
4) $\exists x\, (C(x) \wedge \rceil N(x))$ 5) $\exists x\, (P(x) \wedge C(x))$.
Прочитайте предложения, заданные формулами с ограниченными кванторами, и выясните, какие из них верны:
6) $\forall x_{N(x)}\, \exists y_{N(y)}\, B(x,y)$ 7) $\forall y_{N(y)}\, \exists x_{N(x)}\, B(x,y)$ 8) $\exists y_{C(y)}\, \forall x_{N(x)}\, B(x,y)$.

35. Представьте следующие предложения в виде формул с ограниченными кванторами и выясните, истинны ли они:
1) всякое действительное число является положительным, отрицательным или равным нулю;
2) сумма любых двух положительных чисел положительна;
3) для всякого положительного числа a найдется рациональное число, квадрат которого равен a;

4) любое положительное число, меньшее 1, всегда больше своего квадрата;

5) квадрат любого отрицательного числа положителен;

6) синус всякого положительного числа является положительным числом;

7) существует неотрицательное число, косинус которого равен этому числу;

8) куб некоторого отрицательного числа больше квадрата этого числа.

36. Представьте следующие предложения, выражающие свойства операции сложения действительных чисел, формулами:

1) сложение коммутативно;

2) сложения ассоциативно;

3) существует такое число e, которое в сумме с любым числом x будет равно x (такой элемент e называется нейтральным по сложению; чему он равен?);

4) для любого числа x существует такое число y, которое в сумме с x равно нейтральному по сложению числу (такое число y называется противоположным к x).

37. Представьте следующие предложения, выражающие свойства операции умножения действительных чисел, формулами:

1) умножение коммутативно;

2) умножение ассоциативно;

3) существует такое число e, которое в произведении с любым числом x будет равно x (такой элемент e называется нейтральным по умножению; чему он равен?);

4) для любого ненулевого числа x существует такое число y, которое в произведении с x равно нейтральному по умножению числу (такое число y называется обратным к x).

38. Пусть даны предикаты $A(x)$ и $B(x)$. Запишите формулами следующие утверждения:

1) Предложение $A(x)$ верно при некоторых x, при которых верно $B(x)$.

2) Предложение $A(x)$ верно при всех x, при которых верно $B(x)$.

3) Предложение $A(x)$ верно только при тех x, при которых верно $B(x)$.

4) Предложение $A(x)$ верно при всех тех и только тех x, при которых верно $B(x)$.

39. Проанализируйте истинность предложений:

1) Равенство $|x|=x$ верно при некоторых положительных значениях x.

2) Равенство $|x|=x$ верно при всех положительных значениях x.

3) Равенство $|x|=x$ верно только при положительных значениях x.

Постарайтесь закончить истинное предложение: «Равенство $|x|=x$ верно для всех тех и только тех x, которые удовлетворяют неравенству …»

40. Проанализируйте истинность предложений:

1) Равенство $x^4=3x$ верно при некоторых положительных значениях x.

2) Равенство $x^4=3x$ верно при всех положительных значениях x.

3) Равенство $x^4=3x$ верно только при положительных значениях x.

41. Проанализируйте истинность предложений:

1) Неравенство $x^3>3$ верно при некоторых положительных значениях x.

2) Неравенство $x^3>3$ верно при всех положительных значениях x.

3) Неравенство $x^3>3$ верно только при положительных значениях x.

42. Сформулируйте отрицания к следующим предложениям в позитивной форме. Для этого вначале представьте предложения в виде формул и, воспользовавшись законами логики, постройте отрицания. Приведите примеры чисел, при которых отрицание принимает истинное значение.

а) Если число рациональное, то оно не целое.

б) Если число делится на 2 и на 4, то оно делится на 8.

в) Если сумма чисел a и b является целым числом, то хотя бы одно слагаемое есть целое число.

г) Если произведение двух целых чисел делится на 4, то хотя бы одно число делится на 4.

д) Числа a, b, c равны между собой.

43. Переформулируйте предложения с помощью правила контрапозиции:

а) если число оканчивается на 0, то оно делится на 5;

б) если стол дубовый, то он деревянный;

в) если сумма чисел a и b является иррациональным числом, то хотя бы одно слагаемое есть иррациональное число;

г) если квадрат целого числа является четным числом, то само число также четно;

д) если x равно y и y равно z, то x равно z.

44. Даны предикаты $A(x)$ = «x – ромб», $B(x)$ = «x – прямоугольник», $C(x)$ = «x – параллелограмм», $D(x)$ = «x – трапеция», где переменная x обозначает произвольный четырехугольник. Запишите формулами следующие предложения. Используя законы логики, для каждой формулы постройте ее отрицание. Сформулируйте полученные отрицания.

1) Все ромбы являются параллелограммами.

2) Ни один ромб не является трапецией.

3) Некоторые прямоугольники являются ромбами.

4) Некоторые прямоугольники не являются ромбами.

5) Найдется трапеция, являющаяся прямоугольником.

Какие из исходных предложений истинны?

45. Дана числовая функция $y = f(x)$. Используя кванторы, запишите предложение: «Функция f принимает отрицательные значения при всех положительных значениях аргумента». Постройте отрицание. Прочитайте. Приведите два примера функций, для одной из которых это предложение истинно, а для другой – ложно. Верно ли предложение для функции $f(x) = \sin x$?

46. Выполните те же самые задания, данные в задаче № 45, для предложения: «Функция f принимает отрицательные значения при некоторых положительных значениях аргумента».

47. Даны предикаты $A(x)$ = «x делится на 4», $B(x)$ = «x делится на 2», $C(x)$ = «x делится на 8», где x – переменная по множеству целых чисел. Прочитайте предложения, заданные следующими формулами. Постройте отрицания, прочитайте полученные предложения. Докажите или опровергните данные предложения (то есть обоснуйте, что именно верно: исходное предложение или его отрицание).

1) $\exists x\ (A(x) \wedge \rceil B(x))$,

2) $\forall x\ (\rceil A(x) \rightarrow \rceil B(x))$,

3) $\forall x\ (C(x) \rightarrow A(x) \wedge B(x))$,

4) $\forall x\ (\rceil C(x) \rightarrow \rceil A(x) \wedge \rceil B(x))$,

5) $\forall x\ (\rceil B(x) \rightarrow \rceil A(x) \wedge \rceil C(x))$.

48. Сформулируйте отрицания к следующим высказываниям. Вначале запишите каждое предложение формулой, затем, используя законы логики, постройте отрицания. Определите, какие из исходных высказываний истинны, а какие ложны.

1) Сумма любых двух рациональных чисел является рациональным числом.

2) Произведение двух некоторых не целых чисел является целым числом.

3) Любое натуральное число является квадратом некоторого натурального числа.

4) Существует действительное число, меньшее любого натурального числа.

5) Найдется натуральное число, меньшее всякого натурального числа.

6) Каждое целое число, делящееся на 5, по модулю больше либо равно 5.

49. Прочитайте предложения, заданные формулами. Докажите или опровергните:

1) $\exists z\ \forall x\ \forall y\ (xz=yz)$ 2) $\forall x>0\ \exists y<x\ \forall z\ (y<z<x \to z>0)$

3) $\exists x\ \exists y\geq x\ \forall z\ (x\leq z\leq y \to z=0)$ 4) $\exists x\ \exists y\ \forall z\ (x>z \wedge y<z)$

5) $\exists x\ \exists y\ \forall z\ (x>z \vee y<z)$ 6) $\forall z\ \exists x\ \exists y\ (x>z \wedge y<z)$

7) $\forall n\in\mathbf{N}\ \forall m\in\mathbf{N}\ \exists k\in\mathbf{N}\ (m=n\cdot k)$ 8) $\exists n\in\mathbf{N}\ \forall m\in\mathbf{N}\ \exists k\in\mathbf{N}\ (m=n\cdot k)$.

50. Опровергните следующие предложения. Для этого вначале запишите каждое предложение формулой, затем, используя законы логики, постройте отрицание и покажите его истинность.

1) Равенство $x^y=y^x$ неверно ни для каких различных натуральных чисел x и y.

2) Равенство $x^2+x=y^2+y$ верно только при равных числах x и y.

51. Сформулируйте отрицания к предложениям:

1) если Петя не решит задачу на экзамене, то получит «2» или «3»;

2) если каждый ученик решит задачу на экзамене, то все ученики сдадут экзамен.

52. Сформулируйте отрицания к следующим предложениям:

а) Хотя бы один ученик решил все задачи из домашнего задания.

б) Каждую задачу из домашнего задания решил хотя бы один ученик.

Для каждого предложения пунктов а) и б) приведите пример, когда предложение неверно (то есть истинно его отрицание). Обоснуйте разницу предложений пунктов а) и б).

53. Сформулируйте отрицание к предложению: «Найдутся пять последовательных натуральных чисел, каждое из которых является составным». Верно ли оно?

54. Сформулируйте теоремы в условной форме.

1) В параллелограмме противоположные углы попарно равны.

2) Биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны.

3) Вписанный в окружность угол, опирающийся на диаметр, прямой.

4) В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета.

55. Перейдите от категоричной формы теоремы к условной форме, опустив внешний квантор общности.

1) Любой правильный многоугольник является выпуклым.

2) В любом описанном около окружности четырехугольнике суммы противоположных сторон равны.

3) Всякая последовательность, имеющая предел, ограничена.

4) Отношение площадей любых двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

56. Сформулируйте теоремы в категоричной форме, не восстанавливая кванторные слова.

1) Если треугольник является равнобедренным, то углы при основании этого треугольника равны.

2) Если четырехугольник является параллелограммом, то его противоположные стороны попарно равны.

3) Если функции f и g являются возрастающими, то их сумма есть возрастающая функция.

4) Если функция имеет производную, то она непрерывна.

57. Сформулируйте теоремы в категоричной форме, восстановив опущенные кванторные слова.

1) Если многоугольники равны, то они имеют равные площади.

2) Если диагонали трапеции равны, то трапеция равнобедренная.

3) Если трапеция равнобедренная, то ее диагонали равны.

4) Если функция непрерывна на отрезке, то она ограничена на этом отрезке.

58. Сформулируйте теоремы (в условной и категоричной формах), восстановив все необходимые кванторные слова.

1) Если точка лежит на биссектрисе угла, то она равноудалена от его сторон.

2) Если четырехугольник вписан в окружность, то сумма его противоположных углов равна $180°$.

59. Для каждой теоремы из задач №49–52 постройте обратные утверждения и выясните, верны ли они.

60. Сформулируйте теоремы на языке необходимых и достаточных условий.

1) Диагонали ромба перпендикулярны.

2) Сумма двух целых чисел, делящихся на 3, также делится на 3.

3) Любые два равных треугольника подобны.

61. Выделите логическую структуру теоремы: «В равнобедренном треугольнике медианы, проведенные к боковым сторонам, равны». Сформулируйте и докажите обратную теорему.

62. Дана теорема: «В прямоугольном треугольнике катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы». Постройте два обратных предложения к этой теореме. Докажите или опровергните их.

63. Для каждой из следующих теорем сформулируйте обратное, противоположное и контрапозитивное утверждения и выясните, какие из них верны.

1) Диагонали ромба делят его углы пополам.

2) В равнобедренном треугольнике медиана и высота, проведенные к основанию, совпадают.

3) В равнобедренном треугольнике биссектриса и медиана, проведенные к основанию, совпадают.

4) В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы.

64. Дана задача: «В треугольнике ABC угол B равен 60°, AB=1, BC=2. Найти AC». Проанализируйте правильность следующих решений.

1) «Сторона AB равна половине BC. Так как в прямоугольном треугольнике катет, лежащий против угла 30°, равен половине гипотенузы, то величина угла C равна 30°. Угол A действительно прямой. По теореме Пифагора находим сторону AC. Она равна $\sqrt{3}$».

2) «Известно, что если катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого угла, равен 30°. Так как AB в 2 раза меньше BC, то угол C, лежащий против AB, равен 30°. Тогда косинус угла C равен отношению AC к BC, откуда $AC=BC\cdot\cos 30°=\sqrt{3}$».

65. Запишите символически теоремы, предварительно восстановив кванторные слова.

1) Если две различные прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.

2) Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая прямая перпендикулярна этой плоскости.

3) Если две различные прямые перпендикулярны данной плоскости, то они параллельны.

4) Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.

5) Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна этой плоскости.

66. Методом от противного докажите, что уравнение $x^2 = 2$ не имеет рациональных корней.

67. Докажите следующие теоремы методом от противного.

1) Если прямая на плоскости пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую прямую.

2) Если на плоскости две различные прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.

При доказательстве второй теоремы методом от противного получите противоречие с первой теоремой.

68. Приведите свой пример теоремы, доказав ее методом от противного.

69. Группе, в которой 11 человек, раздали 35 конфет. Докажите, что найдется человек, получивший как минимум 4 конфеты.

70. Запишите правило вывода, на котором основан так называемый метод полного перебора, суть которого заключается в следующем. Имеется ряд предложений, из которых хотя бы одно истинно. Из каждого предложения выводят P. Отсюда заключают, что предложение P верно.

71. Методом полного перебора докажите, что при любом целом n число n^2+n четное.

72. Методом математической индукции докажите формулу общего члена геометрической прогрессии.

73. Перемножьте выражения: $(a–1)(a+1)$, $(a–1)(a^2+a+1)$, $(a–1)(a^3+a^2+a+1)$. Сформулируйте гипотезу о том, чему будет равно произведение $(a–1)(a^{n–1}+a^{n–2}+…+a+1)$ при любом натуральном n. Докажите полученную формулу методом математической индукции. Можно ли доказать формулу другим способом?

74. Докажите двумя способами, что число n^3+2n делится на 3 при любом натуральном n. Верно ли утверждение, если n – произвольное целое число?

75. Методом математической индукции докажите справедливость утверждений для всех натуральных n:

1) число $2\cdot 7^n+1$ делится на 3; 2) число $3^{2n}+7^{2n+1}$ делится на 8;

3) число 4^n+8^{2n+1} делится на 3; 4) число $5^{2n}-2^{2n}$ делится на 7.

76. Докажите, что сумма S_n квадратов первых n натуральных чисел может быть вычислена по формуле $S_n=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

77. Докажите тождество $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$, где n – натуральное число.

78. Верно ли равенство $1^3+2^3+3^3+\ldots+2014^3=(1+2+3+\ldots+2014)^2$?

79. Зная, что производная линейной функции $y=kx+b$ равна k, а производная произведения функций вычисляется по формуле $(fg)'=f'g+fg'$, докажите, что при любом натуральном n имеет место формула

$$(x^n)'=nx^{n-1}.$$

80. Докажите, что при всех натуральных $n\geq 3$ верно неравенство $n^2>2n+1$.

81. При каких натуральных n верно неравенство $n!>2^n$?

82. Методом математической индукции докажите, что для любых натуральных чисел n и b число n можно представить в виде $n=bq+r$, где q и r – целые числа, причем $0\leq r<b$.

83. На сколько частей делится плоскость n различными прямыми, проведенными в этой плоскости через одну общую точку?

84. Докажите, что при любом натуральном n с помощью циркуля и линейки с заданной единицей длины можно построить отрезок длиной в $\sqrt{n}$.

Упражнения к главе 2

85. Дано множество $S = \{\{1,2\}, \{3\}, 1\}$. Найдите все его элементы. Что они представляют? В чем разница объектов 3 и $\{3\}$?

86. Поставьте, где возможно, один из знаков – $\in$, $\subseteq$, $=$:

1) $1 \quad \{0,1,2\}$ 2) $\{1\} \quad \{0,1,2\}$ 3) $\{1,2\} \quad \{0,1,2\}$

4) $\{a,b,c,d\} \quad \{a,c,b,d\}$ 5) $\{2\} \quad \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ 6) $1 \quad \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$

87. Приведите пример различных множеств A, B, C, D, удовлетворяющих условиям: $A \subset B$, $B \in C$, $C \subset D$.

88. Приведите пример различных множеств A, B, C, удовлетворяющих условиям: $A \in B$, $B \not\subset C$, $A \in C$.

89. Опишите словесно следующие множества действительных чисел:

$A = \{x \mid x^2=1\}$;

$B = \{x \mid x^3<x^2\}$;

$C = \{x \mid x$ – не целое число$\}$;

$D = \{x \mid x$ – квадрат целого числа$\}$.

Запишите множества C и D, используя только математические символы.

90. «Прочитайте» множества $A = \{x^2 \mid x \vdots 4\}$ и $B = \{x \in \mathbf{Z} \mid x^2 \vdots 4\}$. Равны ли эти множества? Является ли одно из них подмножеством другого? Обоснуйте. Отметим, что выражение $x \vdots 4$ означает, что число x целое и имеет вид $4n$ для некоторого целого числа n.

91. Докажите, что множество $B = \{x \in \mathbf{Z} \mid x^2 \vdots 4\}$ не равно множеству $C = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 \vdots 4\}$.

92. «Прочитайте» следующие подмножества множества всех точек на плоскости:

$S = \{X \mid OX=3\}$, O – фиксированная точка;

$P = \{X \mid$ расстояние от X до прямой l равно $5\}$, l – фиксированная прямая;

$T = \{X \mid AX=BX\}$, AB – данный отрезок;

$L = \{X \mid X$ – внутренняя точка угла ABC, равноудаленная от его сторон$\}$, $\angle ABC$ – данный угол.

Что представляют собой на плоскости множества S, P, T и L?

93. Запишите символически множества, заданные характеристическим свойством $P(x)$, где x – переменная по множеству натуральных чисел.

1) $P(x)$ = «x – четное число».

2) $P(x)$ = «x – нечетное число».

3) $P(x)$ = «x при делении на 4 дает остаток 2».

94. Запишите символически множества, заданные характеристическим свойством $P(x)$, где x – переменная по множеству действительных чисел. Изобразите эти множества на числовой прямой.

1) $P(x)$ = «Числа x и 5 находятся на числовой прямой на расстоянии, равном 7».

2) $P(x)$ = «Числа x и 5 находятся на числовой прямой на расстоянии не более 7».

3) $P(x)$ = «Число x удалено от числа a на расстояние менее r, но более d», здесь a, r, d – фиксированные числа.

95. Запишите символически множества, заданные указанными характеристическими свойствами:

$P(x)$ = «Целое число x представимо в виде произведения двух натуральных чисел, больших 1».

$Q(x)$ = «Действительное число x представимо в виде частного двух целых чисел».

Что это за множества?

96. Какой из знаков $\in$, $\subseteq$, $=$ можно поставить между множествами $\varnothing$ и $\{\varnothing\}$?

97. Какие из знаков $\in$, $\subseteq$ можно поставить между следующими выражениями:

1) $2 \quad \mathbf{N}$ 2) $\{2\} \quad \mathbf{N}$ 3) $\varnothing \quad \mathbf{N}$ 4) $\{2,3,4,5\} \quad \mathbf{N}$?

98. Соедините множества A и B знаком включения:

1) $A = \{-1,1,2\}$, $B = \{x \mid x^3+x^2-x-1=0\}$;

2) $A = \{x\in\mathbf{Z} \mid 7^{x-1}-7^{x}+6 \geq 0\}$, $B = \{x\in\mathbf{Z} \mid x^2 \leq 3\}$.

99. Какие элементы множества $A = \{1, 2, 3, \{1\}, \{1,2\}, \{4\}\}$ являются его подмножествами?

100. Верно ли утверждение: $\{1,2,3\} \subseteq \{x \mid \exists n\in\mathbf{N} : x\cdot(3n-2)=2n+1\}$?

101. Выясните, пересекаются ли следующие пары множеств:

1) $\{4n+2 \mid n\in\mathbf{Z}\}$ и $\{3k+2 \mid k\in\mathbf{Z}\}$;

2) $\{4n+2 \mid n\in\mathbf{Z}\}$ и $\{2k+1 \mid k\in\mathbf{Z}\}$;

3) $\{5n+4 \mid n\in\mathbf{Z}\}$ и $\{6k+2 \mid k\in\mathbf{Z}\}$;

4) $\{5n+4 \mid n\in\mathbf{Z}\}$ и $\{5k+2 \mid k\in\mathbf{Z}\}$.

102. В каком отношении находятся следующие пары множеств A и B (пересекаются или нет, связаны ли отношением включения, равны или нет)? Поясните почему.

1) A – множество всех натуральных чисел, каждое из которых представимо в виде суммы двух натуральных чисел,
B – множество всех натуральных чисел, больших 1.
2) A – множество всех натуральных чисел,
B – множество всех квадратов натуральных чисел.
3) A – множество всех простых чисел,
B – множество всех квадратов простых чисел.
4) A – множество всех ромбов,
B – множество четырехугольников с пересекающимися диагоналями.
5) A – множество всех прямоугольников,
B – множество всех квадратов.
6) A – множество всех равносторонних треугольников,
B – множество всех равнобедренных треугольников.
7) A – множество прямоугольных треугольников,
B – множество всех остроугольных треугольников.

103. Методом двойного включения докажите равенство следующих пар множеств:

1) $A = \{3n+2 \mid n \in \mathbf{Z}\}$ и $B = \{3k-1 \mid k \in \mathbf{Z}\}$.
2) Пусть x, y – целые числа и $x + y = z$. A – множество общих делителей чисел x и y, B – множество общих делителей чисел y и z.

104. Равны ли множества $A = \{3n+2 \mid n \in \mathbf{N}\}$ и $B = \{3k-1 \mid k \in \mathbf{N}\}$?

105. Даны три множества: A_1 – множество разносторонних треугольников, A_2 – множество равнобедренных треугольников, A_3 – множество равносторонних треугольников. Образуют ли множества A_1, A_2, A_3 разбиение множества всех треугольников на классы?

106. Разбейте множество всех рациональных чисел на 3 класса.

107. Разбейте множество всех целых чисел на 5 классов.

108. Рассмотрите всевозможные разбиения трехэлементного множества $S = \{a,b,c\}$ на 2 класса; на 3 класса.

109. Разбейте множество $A = \{4, 8, 10, 12, 16, 24, 25, 26, 36, 40, 42, 44\}$ на классы так, чтобы выполнялось требование: числа x и y лежат в одном классе тогда и только тогда, когда они имеют одно и то же количество натуральных делителей.

110. Образует ли система множеств **Z** (целых чисел), **Q** (рациональных чисел), **I** (иррациональных чисел) разбиение множества **R** действительных чисел?

111. Разбейте множество **R** на 2 класса; на 4 класса.

112. Перечислите элементы множеств:

$A = \{x\in\mathbf{R} \mid |x^2-3x+1|=1\}$, $B = \{x\in\mathbf{Z} \mid x^4+x^3\leq 2x^2\}$.

113. На множестве всех цифр от 0 до 9 определены множества $A = \{1,3,4,5,7,9\}$, $B = \{4,6,8,9\}$, $C = \{0,2,4,5\}$. Найдите множества $A\backslash(B\backslash C)$ и $(A\backslash B)\backslash C$. Какой отсюда можно сделать вывод?

114. На множестве всех цифр от 0 до 9 определены множества $A = \{x \mid x$ – четная цифра$\}$, $B = \{2^n \mid 0\leq n\leq 3,\ n$ – целое$\}$. Перечислите элементы множеств $A\cup B$, $A\cap B$, $A\backslash B$, $B\backslash A$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A\oplus B$.

115. Даны числовые множества $A = \{x\in\mathbf{R} \mid 2\leq x\leq 5\}$ и $B = \{x\in\mathbf{R} \mid x<3\}$. Найдите множества $A\cup B$, $A\cap B$, $A\backslash B$, $B\backslash A$, $\overline{A}$, $\overline{B}$ и изобразите их на числовой прямой.

116. Изобразите числовые множества $A = \{x\in\mathbf{R} \mid x<3\}$ и $B = \{x\in\mathbf{R} \mid x>1\}$ и $C = \{x\in\mathbf{R} \mid 0\leq x\leq 4\}$ на числовой прямой. Найдите множества $A\backslash C$, $\overline{B}\cap C$ и $(A\cap C)\cup B$.

117. Даны числовые промежутки $A = (-\infty; 3)$, $B = [5; +\infty)$. Представьте следующие множества в виде числовых промежутков или объединения непересекающихся промежутков:
1) $\overline{A}\cup B$; 2) $\overline{A}\cap B$; 3) $\overline{A}\setminus B$.

118. Пусть A и B – произвольные множества. Изобразите с помощью диаграмм Эйлера следующие множества:
1) $\overline{A}\cup B$; 2) $\overline{A}\cap B$; 3) $\overline{A\cap B}$; 4) $\overline{A}\cap\overline{B}$.

119. Пусть A, B и C – произвольные множества. Изобразите с помощью диаграмм Эйлера следующие множества:
1) $A\cap(B\cup C)$; 2) $(A\cap B)\cup(A\cap C)$; 3) $(A\cup B)\setminus C$; 4) $A\cup(B\setminus C)$.

120. Пусть A, B и C – произвольные множества. Изобразите с помощью диаграмм Эйлера следующие множества:

1) $\overline{(A \setminus B)} \cap C$; 2) $\overline{A} \setminus (B \cup C)$; 3) $\overline{A \cup B} \cap C$; 4) $(A \cup \overline{B}) \cap (B \cup C)$.

121. С помощью диаграмм Эйлера проверьте, является ли операция пересечения дистрибутивной относительно разности множеств.

122. Докажите, что пересечение дистрибутивно относительно разности, не опираясь на диаграммы Эйлера.

123. С помощью кругов Эйлера убедитесь, что разность множеств не ассоциативна. Сконструируйте свой конкретный пример множеств, опровергающий ассоциативность этой операции.

124. Выведите следствия из утверждений:

1) $x \in \overline{A}$;
2) $x \notin \overline{A}$;
3) $x \notin A \cap B$;
4) $x \notin A \cup B$;
5) $x \notin A \cap B$, но $x \in A$;
6) $x \in A \cup B$, но $x \notin A$;
7) $x \notin A \setminus B$, но $x \notin B$;
8) $x \notin A \setminus B$, но $x \in A$.

125. Докажите разными способами, что множество A можно представить в виде $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$.

126. Докажите равенство множеств $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ двумя способами (поэлементно и используя законы алгебры множеств). Сделайте иллюстрации на диаграммах Эйлера.

127. Ассоциативна ли операция симметрической разности множеств?

128. Проверьте справедливость следующих равенств множеств:

1) $(A \setminus B) \cup B = A$; 2) $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$; 3) $(A \cup B) \setminus B = A$;

4) $\overline{(A \cap B)} \setminus B = \overline{B}$; 5) $(A \setminus B) \cup \overline{(A \cup B)} = \overline{B}$; 6) $\overline{A \setminus B} = \overline{A} \cup (A \cap B)$.

129. Докажите следующие равенства множеств методом двойного включения:

1) $(A \cup B) \setminus B = A \setminus (A \cap B)$;

2) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$.

130. Проверьте, является ли операция объединения множеств дистрибутивной относительно разности.

131. Известно, что множества A и B не пересекаются. Чему равны множества $A \setminus B$, $A \cap B$? Докажите.

132. Известно, что A включено в B. Найдите множества $A \setminus B$, $A \cap B$, $A \cup B$. Обоснуйте ответ, опираясь на соответствующие определения.

133. По условию предыдущей задачи можно сформулировать три утверждения, начинающихся словами «Если A включено в B, то…». Для каждого из них сформулируйте обратное утверждение и докажите его истинность.

134. Приведите пример множеств A, B и C, опровергающий утверждение: «Если $A \cup C = B \cup C$, то $A = B$».

135. Известно, что множества A, B и C удовлетворяют равенству $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup B$. Найдите необходимое условие, которому удовлетворяют множества A, B и C. Является ли это условие достаточным?

136. Известно, что $C = A \cup B$. Чему равно множество $(A \setminus C) \cup (B \setminus C)$?

137. Докажите следующие утверждения:

1) если A включено в C, то $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$;

2) если множества A и C не пересекаются, то $(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$.

138. Докажите утверждения:

1) $A \subseteq \overline{B} \;\Leftrightarrow\; A \setminus (A \cap B) = A$;

2) $A \subseteq B \cup C \;\Leftrightarrow\; A \cap \overline{B} \subseteq C$;

3) $A \cup B \subseteq C \;\Leftrightarrow\; A \subseteq C$ и $B \subseteq C$;

4) $A \subseteq B$ и $B \subseteq C \;\Leftrightarrow\; A \cup B = B \cap C$.

139. С помощью диаграмм Эйлера изобразите отношения между следующими множествами: A – множество всех прямоугольников, B – множество всех ромбов, C – множество всех параллелограммов, D – множество всех трапеций, E – множество всех четырехугольников. Найдите множество $A \cap B$.

140. Проанализируйте отношения между множествами A, B, C. Изобразите их на кругах Эйлера. Перечислите все элементы множества X в каждом из случаев:

1) A – множество всех натуральных чисел, B – множество всех составных чисел, $C = \{x \in \mathbf{N} \mid x > 20\}$. Множество $X = A \setminus (B \cup C)$.

2) $A = \{x \in \mathbf{Q} \mid x > -1\}$, $B = \mathbf{N}$, $C = \mathbf{Z}$. Множество $X = (A \cap C) \setminus B$.

3) $A = \{x \in \mathbf{Z} \mid x < 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{Z} \mid x > -10\}$, $C = \{x \mid x = 2n+1, n \in \mathbf{Z}\}$. Множество $X = (A \cap B) \cap \overline{C}$.

4) $A = \{x \in \mathbf{Z} \mid x \,\vdots\, 4\}$, $B = \{x \in \mathbf{Z} \mid x \,\vdots\, 6\}$, $C = \{x \in \mathbf{Z} \mid 0 < x < 24\}$. Множество $X = (A \cap C) \setminus B$.

141. На множестве целых чисел определено отношение ρ: $x\rho y \Leftrightarrow |x-y|\geq 3$. Укажите свойства этого отношения. Задайте отношение ρ на множестве $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ перечислением пар.

142. Задайте отношение ρ на множестве A графически на диаграмме Эйлера, обозначая связь $x\rho y$ стрелкой, ведущей от x к y. Такой схематичный рисунок называется *графом отношения*. Определите свойства ρ:

а) $A = \{0, 1, 2, 4, 9, 16, 19\}$, $x\rho y \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$;

б) $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $x\rho y \Leftrightarrow (x + y)$ – четное число.

143. Отношение ρ на множестве A задано правилом: $x\rho y \Leftrightarrow \big||x| - y\big| = 1$. Определите свойства этого отношения на каждом из множеств: а) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, б) $A = \mathbf{Z}$, в) $A = \mathbf{R}$.

144. На множестве A задано отношение:

$$\rho = \{(4,4), (5,5), (6,6), (7,7), (6,5), (6,7), (7,8), (5,7), (6,8)\}.$$

Изобразите граф отношения ρ и определите свойства. Будет ли отношение обладать каким-то дополнительным свойством, если в него добавить пару (5,8)?

145. Существует ли отношение, которое одновременно симметрично и антисимметрично?

146. Изобразите графы следующих отношений и определите их свойства:

а) $A = \{a,b,c\}$, $\rho = \{(a,b), (b,c), (c,a)\}$.

б) $A = \{a,b,c\}$, $\rho = \{(a,b), (b,c), (c,a), (b,a), (a,c), (c,b), (c,c)\}$.

в) $A = \{a,b,c,\}$, $\rho = \{(a,b), (b,c), (b,a), (c,b), (c,c), (a,a), (b,b)\}$.

г) $A = \{a,b,c,d\}$, $\rho = \{(a,b), (b,c), (c,d), (d,a), (c,b), (b,a), (a,d)\}$.

д) $A = \{a,b,c,d,e\}$, $\rho = \{(a,b), (b,c), (c,d), (e,d), (a,c), (b,d), (a,d)\}$.

147. Постройте пример бинарного отношения на множестве $M = \{a, b, c\}$, которое симметрично, рефлексивно, но не транзитивно.

148. Если отношение ρ на множестве A симметрично, транзитивно и $D(\rho)=A$, то ρ рефлексивно. Докажите.

149. Приведите пример бинарного отношения на множестве $M = \{a, b, c\}$, которое транзитивно, но не симметрично и не антисимметрично.

150. Проанализируйте свойства приведенных отношений, заданных на множестве A:

а) $A = \mathbf{N}$, отношение: 1) «x – делитель y»,

2) «x в два раза больше y»,

3) «Числа x и y взаимно простые».

б) $A = \mathbf{R}^+$, отношение: 1) $a=b^2$,

2) $a=kb$ для некоторого $k\in\mathbf{N}$.

в) A – любое множество, отношение: 1) «x равно y»,

2) «x не равно y».

г) A – множество прямых плоскости, отношение: 1) $x\|y$,

2) $x\perp y$.

д) A – множество прямых пространства, отношение: «прямая x скрещивается с прямой y».

е) A – множество векторов, 1) «$\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены»,

2) «$\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположно направлены».

ж) A – булеан некоторого множества M, отношение:

1) S включено в P,

2) S и P не пересекаются,

3) P есть дополнение к S ($P = \overline{S}$).

151. На множестве треугольников задано отношение ρ: «Площадь треугольника x меньше либо равна площади треугольника y». Является ли ρ отношением порядка?

152. На множестве **R** задано отношение ρ: $x\rho y \Leftrightarrow |x| = |y|$. Докажите, что ρ – отношение эквивалентности. Какое разбиение на классы эквивалентности порождает данное отношение?

153. Рассмотрим отношение ρ на произвольном числовом множестве A: $x\rho y \Leftrightarrow$ «$x+y$ – целое четное число». Докажите, что ρ есть отношение эквивалентности. Постройте разбиение на классы, если

а) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, б) A – множество всех целых чисел.

154. На множестве **R** задано отношение: $x\rho y \Leftrightarrow$ «$(x-y)$ – целое число». Докажите, что ρ есть отношение эквивалентности. Запишите классы эквивалентности, порожденные числами 5; 0,2; (–1,5). Что представляет собой геометрически класс эквивалентности, порожденный числом a?

155. На множестве $A = \{x\in\mathbf{Z} \mid 0<x<10000\}$ задано отношение: $x\rho y \Leftrightarrow$ «Числа x и y имеют в десятичной записи одно и то же число цифр». Докажите, что ρ – отношение эквивалентности. Что представляют собой классы эквивалентности ρ? Сколько их?

156. На множестве **Z** определены два отношения ρ и σ: $x\rho y \Leftrightarrow$ «x и y дают одинаковые остатки при делении на 4»; $x\sigma y \Leftrightarrow$ «Разность $x-y$ делится на 4». Докажите, что отношения ρ и σ совпадают, то есть числа x и y находятся в отношении ρ тогда и только тогда, когда x и y находятся в отношении σ. Докажите, что это отношение есть отношение эквивалентности. На какие классы разбивается множество **Z**?

157. Какое возможно обобщение предыдущей задачи?

158. На множестве **Z** определено отношение: $x\rho y \Leftrightarrow$ «Сумма $x+y$ делится на 3». Является ли ρ отношением эквивалентности?

159. Пусть f – функция из A в B. Определим на множестве A отношение: $x\rho y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$. Докажите, что ρ есть отношение эквивалентности. Что представляют собой классы эквивалентности, если $A = B = \mathbf{R}$, при этом:
а) $f(x) = x^2$; б) $f(x) = x^3$; в) $f(x) = \sin x$?

160. Пусть на множестве A задано отношение эквивалентности ρ. Докажите критерий равенства классов эквивалентности: классы, порожденные элементами a и b, равны тогда и только тогда, когда a находится в отношении ρ с b.

161. Используя результат предыдущей задачи, докажите, что никакие два различных класса эквивалентности не пересекаются. Рассуждения можно провести методом от противного.

162. На множестве $A = \{\{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}, \{1,4\}\}$ задано отношение включения $\subseteq$. Постройте граф отношения. Найдите все пары несравнимых элементов.

163. Пусть дано упорядоченное множество $\langle A, \rho\rangle$. Элемент $a \in A$ называется наименьшим элементом множества A, если для любого $x \in A$ верно $a\rho x$. Методом от противного докажите, что если множество имеет наименьший элемент, то он единственен.

164. Отношение ρ между множествами A и B задано правилом: $x\rho y \Leftrightarrow x^y = 16$. Является ли ρ функцией с областью определения A? Является ли обратное отношение ρ^{-1} функцией? Рассмотрите случаи:
а) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;
б) $A = \mathbf{N}$, $B = \mathbf{R}$;
в) $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 4\}$, $B = \mathbf{R}$.

165. Пусть $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 4\}$. Укажите множество B, такое, чтобы отношение ρ, заданное правилом из предыдущей задачи, являлось взаимно однозначным соответствием между A и B.

166. Пусть A – множество окружностей на плоскости, B – множество точек этой плоскости. Между множествами A и B задано отношение f:

$$\omega\, f\, M \Leftrightarrow \text{«Окружность } \omega \text{ имеет центр } M\text{»}.$$

Является ли f функцией с областью определения A? Является ли это соответствие взаимно однозначным?

167. Является ли отношение, заданное формулой $y = (-1)^x \cdot \left[\dfrac{x}{2}\right]$, $x \in \mathbf{N}$, $y \in \mathbf{Z}$, взаимно однозначным соответствием между множествами $\mathbf{N}$ и $\mathbf{Z}$? Через $[a]$ обозначается целая часть числа a, то есть наибольшее целое число, не превосходящее a.

Упражнения к главе 3

Задачи № 168–188 требуется решить, используя основные комбинаторные правила. Для этого рекомендуется вначале четко сформулировать последовательность действий, выполнение которых позволит получить требуемый выбор объектов. Возможно, потребуется разбить множество способов на непересекающиеся классы и отдельно сосчитать число элементов в каждом из них, а затем применить правило сложения. В некоторых случаях достаточно выполнить полный перебор возможных комбинаций.

168. В выражении 5 … 4 … 6 … 3 вместо каждого из многоточий можно вставлять либо знак $+$ (операция сложения), либо знак $\cdot$ (операция умножения). Запишите множество всевозможных результатов.

169. Сколько существует трехзначных чисел, у которых сумма цифр равна 4?

170. Есть 4 сорта пирожных: заварное – 3 штуки, «Грибок» – 5 штук, «Чародейка» – 1 штука, «Ночка» – 4 штуки. Сколькими способами можно выбрать три пирожных разных сортов?

171. Сколько существует натуральных чисел от 10 до 99, в десятичной записи которых имеется хотя бы одна нечетная цифра?

172. В двух урнах лежат разноцветные шары. В первой урне 4 синих, 5 красных, 2 желтых. Во второй урне 3 синих, 6 красных, 5 зеленых. Сколькими способами можно выбрать по одному шару из каждой урны так, чтобы:

а) шары были разного цвета,

б) шары были одного цвета,

в) среди них был хотя бы один зеленый?

173. Шестизначный телефонный номер состоит из различных цифр, первая цифра равна 3, вторая цифра 6 или 9, и все остальные цифры четные. Сколько существует таких номеров?

174. Сколько существует натуральных чисел от 1 до 1000, в десятичной записи которых хотя бы один раз встречается цифра 5?

175. Сколькими способами могут встать в очередь 6 человек – Коля, Петя, Андрей, Вася, Иван, Гриша – так, чтобы ни Коля, ни Петя не стояли бы на первом месте?

176. Сколько всего прабабушек и прадедушек было у всех ваших прабабушек и прадедушек?

177. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 2, 3, 4, 5, 6, 7, если цифры в числе могут повторяться, но первая цифра должна быть отлична от 2, а последняя равна 6 или 7?

178. Сколькими способами можно выбрать из слова «математика» 4 буквы так, чтобы из них можно было составить слово «мама»?

179. Среди новогодних игрушек имеются 2 зеленых, 3 желтых и 4 красных стеклянных шара, 1 зеленый, 5 желтых и 2 красных пластмассовых шара. Сколькими способами можно выбрать один стеклянный шар и один пластмассовый шар так, чтобы они оказались одного цвета?

180. Сколько формальных слов, содержащих не менее двух букв, можно составить из букв слова КОМПАС (каждую букву можно использовать только один раз)?

181. Сколькими способами Женя, Коля, Гена, Боря могут пригласить на танец Аню, Таню, Надю и Галю, если Боря согласен танцевать только с Аней или Таней, а Женя не хочет танцевать с Аней?

182. У одного начинающего коллекционера 10 марок и 5 значков, у второго 7 других марок и 6 других значков. Честным обменом называется обмен одной марки на одну марку или одного значка на один значок. Сколькими способами коллекционеры могут осуществить честный обмен?

183. У Саши есть 4 карточки с цифрами 1, 2, 3 и 4. Он составляет из них трехзначные числа. Сколько различных чисел, делящихся на 6, он может получить?

184. Сколькими способами трое юношей могут пригласить на танец трех из шести девушек, пришедших потанцевать?

185. Сколько существует пятизначных телефонных номеров, которые начинаются с цифры 3 или 7, и все остальные цифры меньше 6, если
а) цифры в номере могут повторяться; б) все цифры различны?

186. У Саши трое друзей. За месяц с каждым из них Саша обедал 9 раз, с каждыми двумя из них – 4 раза, со всеми тремя – один раз. Сколько раз за месяц Саша обедал с друзьями? Сколько раз Саша обедал один, если всего за месяц он обедал 31 раз?

187. На первом курсе учится 40 человек. Среди них 19 человек сдали зачет по истории, 12 человек – по математике, 15 человек – по физике. Зачет только по одному предмету сдали: по истории – 8 человек, по физике – 6 человек. Семь человек сдали зачет и по истории и по математике, из них только один также сдал зачет по физике. Сколько студентов первого курса не сдали зачет ни по одному из перечисленных предметов? Сколько человек сдали зачет только по математике?

188. Сколько существует шестизначных чисел, составленных из цифр 2, 3, 4, 5 так, чтобы любые две соседние цифры были различны?

Для решения последующих комбинаторных задач, возможно, потребуется знание основных формул, позволяющих вычислять число перестановок и число сочетаний (без повторений и с повторениями).

189. Найдите число перестановок букв слова ВОСЕМЬ, которые не начинаются с буквы «Ь».

190. В числе 122334 разрешается переставлять цифры так, чтобы первая цифра была четной. Сколько существует таких перестановок?

191. Анаграммой называется формальное слово, полученное перестановкой букв некоторого данного слова. Сколько анаграмм имеют слова ШКОЛА, КОНТИНЕНТ?

192. На плоскости дано несколько точек, причем известно, что 5 из них лежат на одной прямой, а кроме них никакие 3 не лежат на одной прямой. Через эти точки можно провести 82 прямые, соединяя точки попарно. Сколько точек было дано?

193. В группе 5 мальчиков и 7 девочек. Сколькими способами можно составить команду, в которую войдут 3 мальчика и 4 девочки?

194. Среди новогодних игрушек имеются 7 синих шаров, 5 красных и 3 зеленых. Сколькими способами можно выбрать 2 шара одного цвета?

195. Среди новогодних игрушек имеются 7 синих шаров, 5 красных и 3 зеленых. Сколькими способами можно выбрать 2 шара, чтобы среди них был хотя бы один зеленый?

196. Выпускнику нужно сдать 4 экзамена по ЕГЭ. Сколько вариантов выбора экзаменов у него есть, если математику и русский язык надо сдавать обязательно, а всего можно сдавать экзамены по 9 предметам?

197. Сколько существует четырехэлементных подмножеств множества $S = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, каждое из которых содержит хотя бы одну из цифр 5 или 7?

198. Дано множество букв $S = \{а, б, в, г, д, е, о, л, и\}$.
а) Сосчитайте, сколько существует трехэлементных подмножеств, не содержащих букву *о*?
б) Сколько существует трехэлементных подмножеств, содержащих хотя бы одну гласную букву?
в) Сколько существует четырехэлементных подмножеств, содержащих только одну гласную букву?

199. Имеется 9 разноцветных фломастеров. Сколькими способами можно составить набор из 5 фломастеров?

200. На окружности отметили 7 точек. Сколько треугольников можно нарисовать с вершинами в этих точках? Сколько многоугольников можно нарисовать с вершинами в этих точках?

201. Имеется 4 книги по математике и 6 книг по физике. Сколькими способами можно выбрать 3 книги по математике и 3 книги по физике?

202. В лотерее нужно указать 5 номеров из 36 возможных.
а) Сколькими способами можно осуществить такой выбор?
б) Во скольких случаях будут правильно угаданы по меньшей мере 3 номера из 5 фиксированных?

203. Даны две параллельные прямые. На одной прямой отметили 5 точек, на другой – 7. Сколько существует треугольников с вершинами в отмеченных точках? Обобщите задачу.

204. Запишите в виде многочлена выражение $(x–1)^6$.

205. Найдите слагаемое разложения $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^8$, не содержащее переменной x.

206. Сумма первых трех коэффициентов разложения $\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)^n$ равна 97. Найти коэффициент при x^4.

207. Коэффициент при a^2 в разложении $(3a-2)^n$ равен 216. Найти n.

208. В разложении $\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{3}{x}\right)^{10}$ найти коэффициент при x^4.

209. Коэффициент при x во втором члене разложения $\left(x^2-\frac{1}{4}\right)^n$ равен 31. Найдите n.

210. Найдите член разложения $\left(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{15}$, не содержащий x.

211. Сумма коэффициентов трех первых слагаемых разложения $\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^m$ равна 97. Найдите коэффициент при x^4.

212. Мама каждый день выдает сыну на десерт по одному фрукту. У нее есть 3 одинаковых яблока, 5 одинаковых груш, 2 одинаковых персика и 1 апельсин. Сколькими способами она может выдать эти фрукты за 11 дней?

213. На поляне растут тюльпаны, ромашки, васильки и одуванчики. Сколько видов букетов из 7 цветков можно собрать?

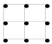
214. Подсчитайте количество способов выбора из 28 костей домино двух костей так, что их можно приложить друг к другу.

215. Сколько существует двузначных (трехзначных) чисел с убывающим порядком цифр?

216. Сколькими способами из 12 человек можно составить две команды по 5 человек?

217. Сколько различных пятизначных чисел можно составить, используя лишь цифры 1, 2, 3, если цифра 3 повторяется ровно два раза?

218. На плоскости дан квадрат, который разбит на четыре равных квадрата. В их вершинах расположены 9 точек. Сколько существует треугольников, у которых одна вершина находится в фиксированной точке A, а две другие – в каких-то остальных восьми точках? Зависит ли ответ от выбора точки A? Рассмотрите все варианты.



219. Имеется 5 разноцветных колец. Сколькими способами можно надеть 3 кольца на 3 средние пальца правой руки?

220. Из 12 девушек и 10 юношей выбирают команду, состоящую из пяти человек. Сколькими способами можно выбрать эту команду так, чтобы в нее вошло не более трех юношей?

221. Решите систему $A_x^y + 3C_x^y = 90 \wedge A_x^y - 2C_x^y = 40$.

222. Сколькими способами 10 гостей можно разбить на 5 пар?

223. Сколько существует шестизначных чисел, составленных из цифр 1, 2, 3, 4, в которых цифра 3 встречается ровно три раза (остальные цифры могут быть записаны сколь угодно раз)?

224. Автомобильный номер некоторого региона состоит из трех цифр, исключая 000, и трех букв русского алфавита, исключая Ь, Ъ, Ё, Ы, Й. Сколько существует автомобильных номеров фиксированного региона?

225. У мальчика имеются 7 кубиков. На одном кубике написана цифра 1, на двух кубиках – цифра 2, на четырех – цифра 3. Сколько различных семизначных чисел мальчик может составить из этих кубиков?

226. Пять ящиков занумеровали числами от 1 до 5. Сколькими способами можно разложить по этим ящикам 9 одинаковых шаров?

227. Пять ящиков занумеровали числами от 1 до 5. Сколькими способами можно разложить по этим ящикам 9 одинаковых шаров так, чтобы ни один ящик не оказался пустым?

228. Задайте множество $A = \left\{k \in \mathbf{Z} : C_{15}^k < C_{15}^{k+2}, k \le 13\right\}$ перечислением элементов.

229. Сколько целых неотрицательных решений имеет уравнение $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$? А натуральных решений?

230. Даны две параллельные прямые. На одной прямой отметили n точек, на другой прямой – k точек. Точки, лежащие на разных прямых, соединили отрезками. Известно, что никакие три отрезка не имеют общей внутренней точки. Сколько получилось внутренних точек пересечения отрезков?

231. За одним столом надо рассадить 5 мальчиков и 5 девочек так, чтобы не было двух рядом сидящих мальчиков и двух рядом сидящих девочек. Сколькими способами это можно сделать?

232. Множество A содержит 10 элементов, множество B – 12, множество C – 20. В объединении множеств A, B и C лежит 30 элементов, а в их пересечении – 5. Сколько элементов лежит только в одном множестве? Сколько элементов лежит только в двух множествах?

233. Сколькими способами 9 студентов можно распределить по трем комнатам общежития: двухместной, трехместной и четырехместной?

234. Бактерии имеют такой закон развития: бактерия живет 1 час и каждые полчаса порождает новую бактерию (всего 2 бактерии за свою жизнь). В некоторый момент времени в организм попала одна бактерия. Сколько бактерий будет через 2 часа? Через 3 часа? Через 5 часов?

235. Двенадцати ученикам выданы два варианта контрольной работы. Сколькими способами их можно посадить в два ряда так, чтобы рядом не было одинаковых вариантов, а у сидящих друг за другом был один и тот же вариант?

236. Сколькими способами можно расставить 4 единицы и 6 нулей так, чтобы никакие две единицы не стояли рядом? Обобщите задачу для n нулей и k единиц.

Варианты контрольных работ

Работа 1. Логика

Вариант 1

1. Даны два предложения: «Данное число не делится на 3 или не делится на 4»; «Если данное число не делится на 3, то оно не делится на 4». Запишите предложения в виде формул логики. С помощью таблицы истинности проанализируйте, равносильны ли исходные предложения.
2. Запишите предложение символически, используя кванторы: «Любое рациональное число из отрезка [1; 2] больше $\sqrt{2}$». Постройте отрицание. Прочитайте. Верно ли исходное предложение?
3. Прочитайте предложение: $\forall x \forall y \exists z\ (|x+y| \geq |x+z|)$, где $x,y,z \in \mathbf{R}$. Докажите или опровергните.
4. С помощью кванторов запишите высказывание о числовой функции f: «При некоторых отрицательных значениях аргумента функция f принимает нулевое значение». Приведите пример функции, удовлетворяющей высказыванию. Сформулируйте отрицание и приведите пример функции, не удовлетворяющей исходному предложению.
5. Докажите или опровергните предложение: «Любое составное натуральное число, меньшее 100, делится или на 2, или на 3, или на 5».
6. Найдите наибольшее целое число x, при котором верна импликация $\left(x^2 > 20\right) \rightarrow \left((x+1)^2 < 20\right)$.

Вариант 2

1. Даны два предложения: «Данное число целое или неположительное»; «Если данное число положительное, то оно не целое». Запишите предложения в виде формул логики. С помощью таблицы истинности проанализируйте, равносильны ли исходные предложения.
2. Запишите предложение символически, используя кванторы: «Любое целое число, делящееся на 3, является нечетным». Постройте отрицание. Прочитайте. Верно ли исходное предложение?
3. Прочитайте предложение: $\forall x \in \mathbf{R}\ \exists y \in \mathbf{R}\ (\operatorname{tg} x = \sin y)$. Докажите или опровергните.
4. С помощью кванторов запишите высказывание о числовой функции f: «Ни при каких положительных значениях аргумента функция f не равна 0». Приведите пример функции, удовлетворяющей высказыванию.

Сформулируйте отрицание и приведите пример функции, не удовлетворяющей исходному предложению.

5. Докажите или опровергните предложение: «Некоторые двузначные натуральные числа, оканчивающиеся цифрой 7, делятся на 7».
6. Найдите наибольшее целое число x, при котором верна импликация $\left((x+1)^2 \geq 20\right) \rightarrow \left(x^2 \leq 20\right)$.

Вариант 3

1. Запишите символически предложение: «Для любого отрицательного числа a существует положительное число b, такое, что сумма чисел a и b будет больше 0». Постройте отрицание. Сформулируйте его. Верно ли исходное предложение?
2. Запишите предложение символически и опровергните: «Для любых значений x и y, если $x<y$, то $x^2<y^2$ или $y^2<x^2$».
3. Даны два предложения: A = «Уравнение $ax^2+bx+c=0$, $a\neq0$, имеет действительный корень», B = «Выражение b^2-4ac больше 0». Установите между предложениями отношение следования. Равносильны ли A и B?
4. Переформулируйте предложение, используя закон контрапозиции: «Если два числа не равны 0, то их произведение не равно 0».
5. Используя законы логики, сформулируйте отрицания к предложениям:

   а) «Если все будут соблюдать правила дорожного движения, то не произойдет ни одной аварии».

   б) «В классе найдется ученик, решивший все задачи из домашнего задания, который не знает теорему Виета».
6. Дана теорема: «В равнобедренном треугольнике высота и биссектриса, проведенные к основанию, совпадают». Выполните следующие задания.

   а) Выделите условие и заключение теоремы. Сформулируйте теорему в условной форме.

   б) Сформулируйте теорему на языке необходимых условий и на языке достаточных условий.

   в) Сформулируйте обратное предложение. Докажите или опровергните.

Вариант 4

1. Запишите символически предложение: «Существует отрицательное число a, такое, что при любом положительном b сумма чисел a и b будет больше 0». Постройте отрицание. Сформулируйте его. Верно ли исходное предложение?

2. Запишите предложение символически и опровергните: «Для любых значений x и y, если $x+y<0$, то $x<0$ и $y<0$».
3. Даны два предложения: A = «Число (–2) является корнем уравнения $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$», B = «Выражение b^2-4ac неотрицательно». Установите между предложениями отношение следования. Равносильны ли A и B?
4. Переформулируйте предложение, используя закон контрапозиции: «Если сумма двух чисел не равна 0, то хотя бы одно слагаемое не равно 0».
5. Используя законы логики, сформулируйте отрицания к предложениям:

   а) «Если все будут соблюдать правила дорожного движения, то не произойдет ни одной аварии».

   б) «Каждый ученик класса, решивший хотя бы одну задачу из домашнего задания, знает теорему Виета».
6. Дана теорема: «В равнобедренном треугольнике высота и медиана, проведенные к основанию, совпадают». Выполните следующие задания.

   а) Выделите условие и заключение теоремы. Сформулируйте теорему в условной форме.

   б) Сформулируйте теорему на языке необходимых условий и на языке достаточных условий.

   в) Сформулируйте обратное предложение. Докажите или опровергните.

Вариант 5

1. Запишите предложение с помощью кванторов: «Неравенство $x^2-5x-6\geq 0$ справедливо для всех целых значений x». Постройте отрицание, сформулируйте его словесно. Верно ли исходное предложение?
2. Постройте отрицание к предложению: «В каждом классе найдется ученик, который решил хотя бы одну задачу».
3. Сформулируйте словесно предложение: $\exists x\left(x\neq\dfrac{\pi}{4}\wedge\sin x=\cos x\right)$. Докажите или опровергните.
4. Установите, если возможно, между предикатами отношение следования:

   а) $x^2-4x+3>0$ и $x>5$; б) $x^2=x$ и $x^3+x^2=2x$, где $x\in\mathbf{R}$.
5. С помощью кванторов постройте все возможные высказывания и найдите их истинностные значения (с обоснованием): $m-n=2$ ($m,n\in\mathbf{N}$).
6. Сформулируйте следующее предложение в условной форме и постройте к нему обратное, противоположное и контрапозитивное предложения: «При положительном дискриминанте квадратный трехчлен имеет хотя бы один

действительный корень». Найдите истинностные значения полученных высказываний.

Ниже приведены варианты задач, разбитых на 10 типов заданий. Эти задачи можно использовать при подготовке к контрольной работе 1.

Задание № 1. Введите в рассмотрение простые высказывания, из которых составлено предложение. Запишите предложение, используя логические связки. Истинно ли предложение? Дайте обоснование.

1) Если число 21 четное, то оно не делится на 3.
2) Если число 42 делится на 4, то оно делится на 3.
3) Числа 12 и 21 оба делятся на 3, при этом хотя бы одно из них четное.
4) Числа 24 и 42 одновременно делятся на 3 или одновременно делятся на 4.
5) Среди чисел 64 и 46 ровно одно число делится на 4.

Задание № 2. Для данных предложений A, B, C и D выполните задания: а) выберите высказывания и найдите их значения; б) выберите предикаты. Для каждого предиката укажите, какие переменные являются свободными, а какие связанными. Придайте свободным переменным такие значения, чтобы получить сначала истинное высказывание, затем ложное высказывание.

1) A = «Числа a и b являются корнями уравнения $2x^2–5x+2=0$»,
B = «1 – единственный корень уравнения $x^2+3x–4=0$»,
C = «Уменьшить сумму чисел $x+y$ на 5»,
D = «Для каждого числа x найдется число y, такое, что $x+y$ равно 0».
2) A = «2 – корень уравнения $2x^2–5x+2=0$»,
B = «Для каждого числа x найдется число y, такое, что $x{\cdot}y$ равно 1»,
C = «Числа x_1 и x_2 являются корнями уравнения $x^2+3x–4=0$»,
D = «Увеличить сумму чисел $x+y$ в 5 раз».

Задание № 3. С помощью таблицы истинности проверьте, равносильны ли следующие формулы.

1) $A \to (A \wedge \rceil B)$ и $B \to \rceil A$.
2) $(A \vee \rceil B)$ и $A \leftrightarrow B$.
3) $(A \vee B) \to \rceil A$ и $\rceil A \wedge B$.
4) $(A \wedge B) \vee (\rceil A \wedge \rceil B)$ и $\rceil A \leftrightarrow \rceil B$.

Задание № 4. Запишите предложение с помощью кванторов. Верно ли предложение?

1) Любое действительное число является произведением двух различных действительных чисел.
2) Существует действительное число a, квадрат которого больше произвольно взятого действительного числа b.
3) Найдется действительное число a, которое меньше квадрата любого действительного числа b.
4) Для любого ненулевого числа a найдется число, произведение которого с a равно 1.
5) Найдется число, произведение которого с любым ненулевым числом равно единице.
6) Существует целое число, на которое делится любое целое число.
7) Любое целое число представимо в виде разности двух натуральных чисел.
8) Любое целое число является произведением двух целых чисел, отличных от единицы.
9) Любое целое число представимо в виде частного двух целых чисел.
10) Для любого числа x найдется такое число y, что их произведение будет меньше 1.
11) Существует число x, такое, что для любого числа y их произведение будет больше 1.
12) Для любого числа x найдется такое натуральное число y, что их сумма будет положительна.
13) Найдется такое число x, что для любого числа y их сумма будет положительна.
14) Каждое натуральное число меньше некоторого действительного числа.
15) Найдется положительное число, которое будет меньше любого натурального числа.

Задание № 5. Сформулируйте отрицание к предложению.
1) Квадрат любого неотрицательного числа a больше a.
2) Существуют два целых числа, делящихся на 5, сумма которых не делится на 5.
3) Ни одно натуральное число, в десятичной записи которого присутствуют только единицы, не делится на 3.
4) Найдется отрицательное число, которое не меньше своего квадрата.
5) Если целое число делится на 4 и на 6, то оно делится на 24.
6) Найдется четное натуральное число, в записи которого присутствуют одни единицы.

7) Если произведение двух целых чисел делится на 4, то хотя бы один из множителей делится на 4.
8) Если число a положительное, то $a^3 > a^2$.
9) Произведение любых двух иррациональных чисел является иррациональным числом.
10) Если сумма двух целых чисел делится на 3, то оба слагаемых делятся на 3.
11) Квадрат любого неотрицательного числа a больше a.
12) Существует квадрат, не являющийся прямоугольником.
13) Некоторый квадрат не является ромбом.
14) Любой параллелограмм является ромбом.

Задание № 6. Переформулируйте предложение на основе закона контрапозиции.

1) Если трапеция является равнобедренной, то около нее можно описать окружность.
2) Если точка треугольника равноудалена от сторон угла, то она лежит на биссектрисе этого угла.
3) Если точка лежит на биссектрисе угла, то она равноудалена от его сторон.
4) Если два целых числа делятся на 5, то их сумма делится на 5.
5) Если два целых числа делятся на 2, то их произведение делится на 4.
6) Если около трапеции можно описать окружность, то трапеция является равнобедренной.
7) Если произведение чисел a и b равно 0, то хотя бы один из множителей равен 0.
8) Если оба целых числа a и b делятся на 3, то сумма $a+b$ также делится на 3.
9) Если числа a и b положительные, то их сумма есть положительное число.
10) Если хотя бы одно из чисел a или b равно 0, то их произведение равно 0.

Задание № 7. Опровергните предложение.

1) Ни один прямоугольник не является ромбом.
2) Все прямоугольники являются квадратами.
3) Существует нечетное число, квадрат которого является четным числом.
4) Для любого числа из отрезка $[-5;3]$ его квадрат будет меньше 9.
5) Найдется число из интервала $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$, синус и косинус которого равны.
6) Для любых действительных чисел a и b если $a < b$, то $a^2 < b^2$.

7) Для любых целых чисел a и b если их произведение делится на 4, то хотя бы один из множителей делится на 4.
8) Существует число из отрезка $[-3;2]$, куб которого больше 8.
9) Для любых значений x и y если $\sin x = \sin y$, то $x = y$.
10) Найдется целое число, кратное 4, квадрат которого не делится на 16.

Задание № 8. Выделите условие и заключение теоремы. Сформулируйте теорему в условной форме. Постройте обратное, противоположное и контрапозитивное предложения.

1) Сумма двух ограниченных функций является ограниченной функцией.
2) Любая сходящаяся последовательность является ограниченной.
3) Диагонали прямоугольника равны.
4) Диагонали квадрата перпендикулярны.
5) Сумма двух целых чисел, делящихся на 3, также делится на 3.
6) В ромб можно вписать окружность.
7) Для того чтобы треугольник являлся прямоугольным, достаточно, чтобы одна из его медиан была равна половине стороны, к которой она проведена.
8) Для того чтобы треугольник являлся прямоугольным, необходимо, чтобы одна из его медиан была равна половине стороны, к которой она проведена.
9) Для того чтобы треугольник являлся равносторонним, необходимо, чтобы центр окружности, вписанной в треугольник, совпадал с центром окружности, описанной около треугольника.
10) Для того чтобы треугольник являлся равносторонним, достаточно, чтобы центр окружности, вписанной в треугольник, совпадал с центром окружности, описанной около треугольника.

Задание № 9. Методом математической индукции докажите, что при любом натуральном n одно число делится на другое.

1) Докажите, что число $2 \cdot 6^{2n} + 5$ делится на 7.
2) Докажите, что число $3^{2n-1} + 5$ делится на 8.
3) Докажите, что число $2 \cdot 15^{n} + 5$ делится на 7.
4) Докажите, что число $5^{2n-1} - 2$ делится на 3.

Задание № 10. Докажите утверждение методом математической индукции.

1) Сумма первых нечетных чисел от 1 до $2n-1$ равна n^2.
2) Сумма первых четных чисел от 2 до $2n$ равна n^2+n.

3) Сумма чисел $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 9}+...+\frac{1}{n^2(n+1)^2}$ равна $\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}$ при любом натуральном n.

4) Число 3^n больше числа $n\cdot 2^n$ при всех натуральных n.

Работа 2. Множества и отношения

Предлагается 12 типов заданий для 5 вариантов контрольной работы.

Задача № 1. Запишите множество двумя способами: указав характеристическое свойство элементов и перечислив все его элементы.

B1. Пусть S – множество всех чисел из отрезка [–20; 20], каждое из которых является значением функции $y = x^3 + 10$ для некоторого целого x.

B2. Пусть S – множество всех натуральных чисел, меньших 20, каждое из которых представимо в виде произведения двух натуральных чисел, больших 1.

B3. Пусть S – множество всех целых чисел, меньших 30, каждое из которых является квадратом некоторого целого числа.

B4. Пусть S – множество всех целых чисел, квадрат каждого из которых меньше 30.

B5. Пусть S – множество всех целых чисел, куб каждого из которых принадлежит отрезку [–30;30].

Задача № 2. Даны множества A и B. Верно ли, что $A \subseteq B$? Обоснуйте.

B1. $A = \{-5, -2, 0, 1, 4\}$, $B = \{x \mid \exists n\in \mathbf{Z} : x = 3n + 1\}$.

B2. $A=\{0,-1,-2,1,2\}$, $B = \{x\in \mathbf{R} \mid x^4-2x^3-x^2+2x=0\}$.

B3. $A = \{x\in \mathbf{R} \mid x^3+x^2-2x=0\}$, $B=\{0,-1,-2,1,2\}$.

B4. $A=\{-1,1,2\}$, $B = \{x\in \mathbf{R} \mid x^5-5x^3+4x=0\}$.

B5. $A = \{x\in \mathbf{R} \mid x^3-2x^2-3x=0\}$, $B=\{-1,-3,1,3\}$.

Задача № 3. Изобразите множества с помощью кругов Эйлера.

B1. а) $S=A\cap(\overline{B}\setminus C)$, б) $P=\overline{A}\setminus(\overline{B}\cap C)$.

B2. а) $S=\overline{A\cap B}\setminus C$, б) $P=(\overline{A}\setminus B)\cap(B\cup C)$.

B3. а) $S=\overline{A}\setminus(B\cap C)$, б) $P=\overline{A\cap B}\setminus\overline{C}$.

B4. а) $S=A\setminus\overline{B\cup C}$, б) $P=\overline{A}\setminus(\overline{B}\cup C)$.

B5. а) $S=\overline{A\cup B}\setminus C$, б) $P=(\overline{A}\cup B)\setminus\overline{C}$.

Задача № 4. Для числовых промежутков A, B и C найдите множество S и изобразите его на числовой прямой.

В1. Дано $A = \{x\in\mathbf{R} \mid x > 2\}$, $B = \{x\in\mathbf{R} \mid x > 3\}$, $C = \{x\in\mathbf{R} \mid x > 5\}$. Найти $S = (A\cup B)\cap\overline{C}$.

В2. Дано $A = \{x\in\mathbf{R} \mid x > 2\}$, $B = \{x\in\mathbf{R} \mid x > 1\}$, $C = \{x\in\mathbf{R} \mid x > 0\}$. Найти $S = (A\cup B)\cap\overline{C}$.

В3. Дано $A = \{x\in\mathbf{R} \mid 1\le x\le 5\}$, $B = \{x\in\mathbf{R} \mid 2\le x\le 7\}$, $C = \{x\in\mathbf{R} \mid x > 0\}$. Найти $(\overline{A}\setminus B)\cap C$.

В4. Дано $A = \{x\in\mathbf{R} \mid 1\le x\le 5\}$, $B = \{x\in\mathbf{R} \mid 2\le x\le 7\}$, $C = \{x\in\mathbf{R} \mid x > 0\}$. Найти $(\overline{A}\cap C)\cup B$.

В5. Дано $A = \{x\in\mathbf{R} \mid 1\le x\le 5\}$, $B = \{x\in\mathbf{R} \mid 2\le x\le 7\}$, $C = \{x\in\mathbf{R} \mid x > 0\}$. Найти $S = (A\cup\overline{C})\setminus B$.

Задача № 5. Изобразите множества A и B на числовой прямой. Проверьте, равны ли эти множества. Если нет, можно ли соединить их знаком включения $\subseteq$?

В1. $A = \{x\in\mathbf{R} \mid 2x\ge 3x\}$, $B = \{x\in\mathbf{R} \mid \dfrac{1}{3x}\ge\dfrac{1}{2x}\}$.

В2. $A = \{x\in\mathbf{R} \mid x\ge\dfrac{1}{x}\}$, $B = \{x\in\mathbf{R} \mid |x| > 1\}$.

В3. $A = \{x\in\mathbf{R} \mid |x| + x = 0\}$, $B = \{x\in\mathbf{R} \mid \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{2}\}$.

В4. $A = \{x\in\mathbf{R} \mid \sqrt{x} < 3\}$, $B = \{x\in\mathbf{R} \mid x^2 < 81\}$.

В5. $A = \{x\in\mathbf{R} \mid x^3\ge x^2\}$, $B = \{x\in\mathbf{R} \mid x^3 > 1\}$.

Задача № 6. Приведите пример множеств, удовлетворяющих условиям.

В1. а) $A\setminus B = \varnothing$, но $A\ne B$, б) $A\not\subseteq B$ и $B\not\subseteq C$, при этом $A\subseteq C$.

В2. а) $A\cup B = B$, но $A\ne B$, б) $A\subseteq B$ и $B\not\subseteq C$, при этом $A\subseteq C$.

В3. а) $A\cap B = B$, но $A\ne B$, б) A и C пересекаются, при этом $A\subseteq\overline{B}$ и $B\not\subseteq\overline{C}$.

В4. а) $A\cup B = A$, но $A\ne B$, б) $A\cap B\subseteq C$, но $A\not\subseteq C$ и $B\not\subseteq C$.

В5. а) $A\cap B = A$, но $A\ne B$, б) $A\not\subseteq B$, при этом $A\cap C\subseteq B\cap C$.

Задача № 7. Докажите равенство множеств двумя способами: методом двойного включения и методом преобразований.

В1. $A\cup\overline{B} = (A\cap B)\cup\overline{B}$.

В2. $\overline{(A\cap B)}\setminus B = (A\setminus B)\cup\overline{(A\cup B)}$.

B3. $\overline{(A \cap B)} \setminus \overline{A} = A \setminus B$.

B4. $\overline{A} = \overline{(A \setminus B)} \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$.

B5. $\overline{(A \cup B)} = \overline{(A \setminus B)} \cap \overline{B}$.

Задача № 8. Пусть A и B – подмножества множества U. Чему равны следующие множества?

B1. $A \cap (B \setminus A)$ и $A \cup (A \setminus B)$.

B2. $(A \setminus B) \cap (B \setminus A)$ и $\overline{A \cap B} \cup \overline{A \setminus B}$.

B3. $(A \cap B) \cup B$ и $\overline{A \cup B} \cap (A \setminus B)$.

B4. $\overline{A \setminus B} \cup \overline{B \setminus A}$ и $(A \cup B) \cap A$.

B5. $(A \setminus B) \cap B$ и $B \cup (B \setminus A)$.

Задача № 9. Даны множества $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$, $C = \{2\}$. Найдите прямое произведение.

B1. $A \times A \times B$.

B2. $A \times B \times A$.

B3. $C \times B \times A$.

B4. $B \times A \times C$.

B5. $B \times C \times B$.

Задача № 10. Изобразите графически (на координатной плоскости) прямое произведение $A \times B$.

B1. $A = \{x \in \mathbf{R} \mid 2 \le x < 4\}$, $B = \{y \in \mathbf{R} \mid 3 < y \le 5\}$.

B2. $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x \le 4\}$, $B = \{y \in \mathbf{R} \mid 3 \le y < 5\}$.

B3. $A = B = \{x \in \mathbf{R} \mid -2 \le x \le 4\}$.

B4. $A = B = \{x \in \mathbf{R} \mid 3 \le x < 6\}$.

B5. $A = (2; 5)$, $B = [3; 4]$.

Задача № 11. На множестве $A = \{a, b, c, d\}$ задано отношение ρ. Постройте граф отношения и выясните, какими свойствами оно обладает.

B1. $\rho = \{(a,b), (a,c), (a,d), (b,d), (b,c)\}$.

B2. $\rho = \{(a,b), (d,c), (d,d), (b,a), (c,d)\}$.

B3. $\rho = \{(a,a), (a,b), (b,a), (b,b), (b,c), (a,c), (d,c)\}$.

B4. $\rho = \{(a,a), (b,b), (c,c), (b,c), (c,b)\}$.

B5. $\rho = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (a,c), (b,a), (c,a)\}$.

Задача № 12. Между множествами A и B задано отношение ρ. Является ли ρ функцией с областью определения A? Является ли отношение ρ взаимно однозначным? Обоснуйте.

B1. $A = \{4, 15, 9, 6\}$, $B = \{2, 3, 19\}$, $x\rho y \Leftrightarrow x < y$.

B2. $A = \{2, 3, 5, 7\}$, $B = \{4, 25, 21\}$, $x\rho y \Leftrightarrow$ «x – делитель y».

B3. $A = \{2, 1, 3\}$, $B = \{0, 2\}$, $x\rho y \Leftrightarrow x^y = 1$.

B4. $A = \{0, 3, 4\}$, $B = \{-4, -3, 1, 5\}$, $x\rho y \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$.

B5. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0, -1, 1\}$, $x\rho y \Leftrightarrow y^x = 1$.

Работа 3. Комбинаторика

Вариант 1

1. Сколько существует шестизначных телефонных номеров, начинающихся на 3, предпоследняя цифра которых нечетная, последняя цифра равна 2 или 4 и все цифры различны?
2. Из 7 отличников школы требуется выбрать двух человек для участия в олимпиаде по математике и двух других человек для участия в олимпиаде по физике. Сколькими способами это можно сделать?
3. В одной урне 7 белых, 2 красных и 3 зеленых шара, в другой 5 белых, 4 синих и 2 зеленых шара. Сколькими способами можно выбрать из каждой урны по шару так, чтобы среди них был хотя бы один зеленый шар?
4. Сколько существует перестановок букв слова АНАНАС, не начинающихся на букву А?
5. В выражении $\left(a^2 - 1\right)^{10}$ привели подобные члены. Найти коэффициент при a^6.

Вариант 2

1. Сколько существует трехзначных чисел, в записи которых нет нулей, а цифра 3 встречается не более одного раза?
2. Сколько существует перестановок букв слова АВТОМАТ, в которых одинаковые буквы стоят рядом?
3. Сколько существует трехэлементных подмножеств множества $S = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, каждое из которых содержит цифру 7 и хотя бы одну четную цифру?

4. У одного студента 5 книг, у другого – 7. Сколькими способами они могут обменять 2 книги одного на 2 книги другого?

5. В выражении $(3a-2b)^5$ привели подобные члены. Найти коэффициент при одночлене a^2b^3.

Вариант 3

1. Сколько существует четырехзначных чисел, в записи которых все цифры различны, первая цифра не равна 1 и нет цифр, делящихся на 3?

2. У одного начинающего коллекционера 6 марок, у второго 8 других марок. Сколькими способами можно осуществить обмен трех марок одного из коллекционеров на три марки другого?

3. Сколько существует четырехэлементных подмножеств множества $S=\{C,T,P,E,K,O,З,A\}$, каждое из которых содержит хотя бы одну гласную букву?

4. Сколько существует перестановок букв слова ХОРОШО, не начинающихся на букву Х?

5. В выражении $(a+2b)^7$ привели подобные члены. Найти коэффициент при одночлене a^3b^4.

Вариант 4

1. Сколько существует пятизначных чисел, в записи которых нет четных цифр, а обе крайние цифры делятся на 3?

2. Среди 15 лотерейных билетов 5 выигрышных. Сколькими способами можно выбрать 3 билета, среди которых будет ровно один выигрышный?

3. Сколько существует трехэлементных подмножеств множества $S=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, каждое из которых содержит хотя бы одну из цифр 5, 6 или 7?

4. В одной урне 7 белых, 2 красных и 3 зеленых шара, в другой 5 белых, 4 синих и 2 зеленых шара. Сколькими способами можно выбрать из каждой урны по шару так, чтобы они были разного цвета?

5. В разложении $\left(x+\dfrac{3}{x}\right)^8$ найдите слагаемое, которое не содержит переменную *x*.

Вариант 5

1. Сколько существует различных перестановок цифр числа 232545, первые две цифры которых четные?
2. На одной из двух параллельных прямых отметили 4 точки, на другой – 6 точек. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?
3. В корзине 10 черных и 5 белых шаров. Сколькими способами можно вынуть 4 шара, среди которых будет хотя бы один белый шар?
4. Сколько существует трехзначных чисел, средняя цифра которых меньше каждой из крайних?
5. Сколько существует различных перестановок букв слова КАРТОЧКА, обе крайние буквы которых согласные?

Тестовые задания

Каждое задание предлагаемых тестов предполагает либо выбрать все правильные ответы из списка предложенных вариантов, либо записать ответ на вопрос задачи. Задача считается решенной, если указаны в точности все верные ответы.

Тест 1 (логика и множества)

Вариант 1

1. Выберите верные утверждения:
а) $\{2,3\}\setminus\{1,3\}=\varnothing$; б) $\varnothing\cup\varnothing=\varnothing$; в) $\{1,2\}\cup\{3,4\}=\varnothing$;
г) $\{1,3\}\cap\{2,3\}=\{1,2\}$; д) $\{1,2\}\setminus\{1,2,3\}=\{3\}$.

2. Даны множества $A=\{a,б,в,г,д\}$, $B=\{a,e\}$, $C=\{б,в,г,д\}$. Найдите множество $(A\cup B)\setminus C$.

3. Множество B содержит 9 элементов, пересечение множеств A и B содержит 2 элемента, а их объединение – 15 элементов. Сколько элементов лежит в множестве A?

4. Даны множества $A = \{x\in\mathbf{R} \mid 0 \le x < 3\}$, $B = \{x\in\mathbf{R} \mid 0 < x < 3\}$, $C = \{x\in\mathbf{R} \mid 0 \le x \le 3\}$, $D = \{x\in\mathbf{R} \mid 0 < x \le 3\}$. Какие из включений справедливы:
а) $A\subseteq B$, б) $A\subseteq C$, в) $A\subseteq D$, г) $B\subseteq C$, д) $B\subseteq D$, е) $C\subseteq D$?

5. Заданы произвольные множества A и B. Найдите множества, которые в общем случае ***не равны*** множеству $A\cup B$:
а) $(A\setminus B)\cup B$; б) $A\cap(B\setminus A)$; в) $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$;
г) $(A\cap B)\cup(A\cup B)$; д) $(A\setminus B)\cup A$.

6. Какие из множеств $P=(\overline{A}\cap B)\cup(A\cap C)$, $Q=(\overline{A}\cup B)\cap(A\cup C)$, $S=(A\setminus B)\cap(B\setminus C)$ являются пустыми при любых A, B и C:
а) P, б) Q, в) S, г) ни одно из множеств не пусто.

7. Заданы произвольные множества A, B и C. Расположите в последовательность указанные множества так, чтобы каждое из них было подмножеством следующего за ним:
а) A; б) $A\cup B$; в) $A\cap C$; г) $A\cap B\cap C$.

8. На множестве $\mathbf{R}$ задано отношение: $x\rho y \Leftrightarrow x\cdot y = 0$. Отношение ρ:
а) рефлексивно; б) антирефлексивно; в) симметрично;

г) антисимметрично; д) транзитивно.

9. Выберите формулы, которым равносильна формула $A \to \overline{B}$:
а) $\overline{A} \to B$; б) $B \to \overline{A}$; в) $A \wedge B$; г) $\overline{B} \to A$; д) $\overline{A} \to \overline{B}$.

10. Выберите верные утверждения (переменные x и y принимают действительные значения).
а) Произведение двух действительных чисел больше 0 только тогда, когда оба множителя положительны.
б) Для того чтобы $|x| = |y|$, необходимо, чтобы $x = y$.
в) Выражение $x^2 - 2x + 2$ положительно при любом значении x.
г) Для того чтобы сумма двух действительных чисел была отрицательна, достаточно, чтобы хотя бы одно слагаемое было отрицательным.

11. Дано предложение $\exists x \in D_f \left((x > 0) \wedge (f(x) < 0)\right)$. Выберите все функции f, для которых это утверждение истинно:
а) $f(x) = \sin x$; б) $f(x) = |x|$; в) $f(x) = x^3$;
г) $f(x) = \frac{1}{x}$; д) $f(x) = 1 - x$.

12. Какое предложение является отрицанием предложения «если *A*, то не *B*»:
а) «Если *A*, то *B*»; б) «Если не *A*, то не *B*»; в) «*A* и не *B*»;
г) «Не *A* и *B*»; д) «*A* и *B*» ?

13. Отрицанием высказывания «Всем студентам легко и интересно решать задачи» является:
а) некоторым студентам не легко или не интересно решать задачи;
б) всем студентам не легко или не интересно решать задачи;
в) всем студентам не легко и не интересно решать задачи;
г) некоторым студентам легко и интересно решать задачи.

14. Приведите пример, который опровергает утверждение «Все целые числа, делящиеся на 3 и на 5, являются нечетными».

Вариант 2

1. Выберите верные утверждения:
а) $\{2,3\} \in \{1,2,3\}$; б) $\{1\} \subseteq \{3,1\}$; в) $\varnothing \in \{1,2,3\}$;
г) $\varnothing \subseteq \{1,2,3\}$; д) $\varnothing \in \{\varnothing\}$.

2. Найдите разность множеств $A = \{0,-1,-2,3\}$ и $B = \{0,1,2,-3\}$.

3. Множество A содержит 3 элемента, множество B – 4 элемента, множество C – 2 элемента. Сколько элементов лежит в прямом произведении $A \times B \times C$?

4. Даны множества $A = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 < x \le 3\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 \le x \le 3\}$, $C = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 < x < 3\}$. Какие из включений справедливы:
а) $A \subseteq B$, б) $A \subseteq C$, в) $B \subseteq A$, г) $B \subseteq C$, д) $C \subseteq A$, е) $C \subseteq B$?

5. Заданы произвольные множества A и B. Найдите множества, которые равны множеству $A \cap B$:
а) $A \setminus \overline{B}$; б) $\overline{A \cup B}$; в) $(A \cup B) \setminus A$;
г) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$; д) $(A \cap B) \cup (B \cap A)$.

6. Пусть A и B – произвольные множества. Какие утверждения следуют из того, что $x \in A$:
а) $x \in A \cap B$; б) $x \in A \cup B$; в) $x \in A \setminus B$;
г) $x \in B \setminus A$; д) $x \notin A \setminus B$; е) $x \notin B \setminus A$?

7. Заданы произвольные множества A, B и C. Расположите в последовательность указанные множества так, чтобы каждое из них было подмножеством следующего за ним:
а) $A \cup B \cup C$; б) $A \cap B$; в) A; г) $A \cup B$.

8. На множестве **R** задано отношение: $x \rho y \Leftrightarrow x \cdot y = 1$. Отношение ρ:
а) рефлексивно; б) антирефлексивно; в) симметрично;
г) антисимметрично; д) транзитивно.

9. Выберите формулы, которым равносильна формула $A \to \overline{B}$:
а) $\overline{A} \to B$; б) $B \to \overline{A}$; в) $A \wedge B$; г) $A \vee B$; д) $\overline{A} \vee \overline{B}$.

10. Выберите верные утверждения (переменные x и y принимают действительные значения).
а) Для того чтобы $(x+2)(x-3)=0$, необходимо, чтобы $x+2=0$.
б) Для того чтобы $x^2 = y^2$, достаточно, чтобы $x = y$.
в) Произведение двух действительных чисел равно 0 только тогда, когда оба множителя равны 0.
г) Сумма двух действительных чисел всегда больше их разности.

11. Дано предложение $\forall x \in D_f \left(x < 0 \to f(x) > 0\right)$. Найдите функции f, для которых это утверждение истинно:
а) $f(x) = \sin x$; б) $f(x) = |x|$; в) $f(x) = x^3$;

г) $f(x)=\dfrac{1}{x}$; д) $f(x)=1-x$.

12. Какое предложение является отрицанием предложения «если A, то B»:
а) «Если не A, то не B»; б) «Если A, то не B»; в) «A и не B»;
г) «Не A и не B»; д) «Не A или не B» ?

13. Отрицанием высказывания «Некоторым студентам легко и интересно решать задачи» является:
а) некоторым студентам не легко или не интересно решать задачи;
б) всем студентам не легко или не интересно решать задачи;
в) всем студентам не легко и не интересно решать задачи;
г) некоторым студентам легко и интересно решать задачи.

14. Приведите пример, который опровергает утверждение: «Каждое четное число, лежащее в промежутке $40 \le x \le 60$, делится на 3 или на 4».

Вариант 3

1. Выберите верные утверждения:
а) $\{2,3\}\setminus\{1,3\}=\{1\}$; б) $\varnothing\cup\varnothing=\varnothing$; в) $\{1,2\}\cap\{3,4\}=\varnothing$;
г) $\{1,3\}\cup\{2,3\}=\{1,2\}$; д) $\{1,2\}\setminus\{1,2,3\}=\varnothing$.

2. Найдите симметрическую разность множеств $A=\{0,-1,-2,3\}$ и $B=\{0,1,2,-3\}$.

3. Разность множеств A без B содержит 7 элементов, объединение множеств A и B содержит 12 элементов, а их пересечение – 3 элемента. Сколько элементов лежит в разности B без A?

4. Даны множества $A=\{x\in\mathbf{R} \mid 0<x\le 3\}$, $B=\{x\in\mathbf{R} \mid 3\le x<7\}$, $C=\{x\in\mathbf{R} \mid 1<x<3\}$, $D=\{x\in\mathbf{R} \mid 0\le x\le 1\}$. Какие пары множеств пересекаются:
а) A и B, б) A и C, в) A и D, г) B и C, д) B и D, е) C и D?

5. Заданы произвольные множества A и B. Найдите множества, которые в общем случае ***не равны*** множеству A:
а) $(A\setminus B)\cup A$; б) $A\cap(A\cup B)$; в) $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$;
г) $A\cup(A\cap B)$; д) $A\cup(B\setminus A)$.

6. Пусть A и B – произвольные множества. Какие из включений справедливы:
а) $A\subseteq A\cap B$; б) $A\subseteq A\cup B$; в) $A\cap B\subseteq A$;
г) $A\cup B\subseteq A$; д) $A\subseteq A\setminus B$; е) $A\setminus B\subseteq A$?

7. Заданы произвольные множества A, B и C. Расположите в последовательность указанные множества так, чтобы каждое из них было подмножеством следующего за ним:

а) A; б) $A \cap B$; в) $A \cup B$; г) $A \cap B \cap C$.

8. На множестве **R** задано отношение: $x\rho y \Leftrightarrow x = y + 1$. Отношение ρ:

а) рефлексивно; б) антирефлексивно; в) симметрично;
г) антисимметрично; д) транзитивно.

9. Выберите формулы, которым равносильна формула $A \to B$:

а) $\overline{A} \to B$; б) $B \to \overline{A}$; в) $\overline{A} \vee B$; г) $A \vee \overline{B}$; д) $\overline{A} \to \overline{B}$.

10. Выберите верные утверждения (переменные x и y принимают действительные значения).

а) Для того чтобы сумма двух действительных чисел была равна 0, необходимо и достаточно, чтобы эти числа были равны 0.

б) Для того чтобы $|x| = |y|$, достаточно, чтобы $x = y$.

в) Выражения $x^2 - 2x + 1$ и $x^2 + 2x - 1$ не равны ни при каком значении x.

г) Для того чтобы $x < 5$, необходимо, чтобы $x < 7$.

11. Дано предложение $\exists x \in D_f \left(x > 0 \wedge f(x) > 0\right)$. Найдите функции f, для которых это утверждение истинно:

а) $f(x) = \sin x$; б) $f(x) = |x|$; в) $f(x) = -x^2$;
г) $f(x) = 1 - 2^x$; д) $f(x) = 1 - x$.

12. Какое предложение является отрицанием предложения «Если не *A*, то не *B*»:

а) «Если не *A*, то *B*»; б) «Если *A*, то не *B*»; в) «*A* и не *B*»;
г) «Не *A* и *B*»; д) «*A* и *B*» ?

13. Отрицанием высказывания «Некоторым студентам легко или интересно решать задачи» является:

а) некоторым студентам не легко или не интересно решать задачи;
б) всем студентам не легко или не интересно решать задачи;
в) всем студентам не легко и не интересно решать задачи;
г) некоторым студентам легко и интересно решать задачи.

14. Приведите пример, который опровергает утверждение «Все целые числа, делящиеся на 3 и на 5, являются нечетными».

Вариант 4

1. Выберите верные утверждения:

   а) $\{2{,}3\}\subseteq\{1{,}2{,}3\}$; б) $\{1\}\subseteq\{3{,}1\}$; в) $\varnothing\subseteq\{1{,}2{,}3\}$;

   г) $\{1\}\in\{3{,}1\}$; д) $\{1{,}2\}\subseteq\{1{,}3{,}4\}$.

2. Даны множества $A=\{б,в,г,д\}$, $B=\{а,б,в\}$, $C=\{а,е\}$. Найдите множество $A\cup(B\setminus C)$.

3. Разность множеств *A* без *B* содержит 7 элементов, объединение множеств *A* и *B* содержит 12 элементов, а их пересечение – 3 элемента. Сколько элементов лежит в разности *B* без *A*?

4. Даны неравенства от переменной *x*: $1 < x \le 7$, $3 \le x < 7$, $4 \le x \le 6$, $1 < x < 7$. Расположите эти неравенства в последовательность так, чтобы каждое неравенство было следствием предыдущего (то есть запишите неравенства в цепочку $A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow A_3 \Rightarrow A_4$).

5. Заданы произвольные множества *A* и *B*. Найдите множества, которые равны множеству *A*:

   а) $(A\setminus B)\cup A$; б) $A\cap(A\cup B)$; в) $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$;

   г) $A\cup(A\cap B)$; д) $A\cup(B\setminus A)$.

6. Пусть *A* и *B* – произвольные множества, а *C* есть пересечение *A* и *B*. Какие из следующих множеств наверняка пустые:

   а) $(A\cap C)\setminus(B\cap C)$; б) $(A\cup C)\setminus(B\cup C)$;

   в) $(C\setminus A)\cup(C\setminus B)$; г) $(A\cup C)\setminus(B\cap C)$?

7. Заданы произвольные множества *A*, *B* и *C*. Расположите в последовательность указанные множества так, чтобы каждое из них было подмножеством следующего за ним:

   а) A; б) $A\cap C$; в) $A\cup B$; г) $A\cup B\cup C$.

8. На множестве **R** задано отношение: $x\rho y \Leftrightarrow x > y + 1$. Отношение ρ:

   а) рефлексивно; б) антирефлексивно; в) симметрично;

   г) антисимметрично; д) транзитивно.

9. Выберите формулы, которым равносильна формула $\overline{A}\to B$:

   а) $\overline{B}\to A$; б) $B\to\overline{A}$; в) $A\wedge B$; г) $A\vee B$; д) $\overline{A}\vee\overline{B}$.

10. Выберите верные утверждения (переменные *x* и *y* принимают действительные значения).

а) Произведение двух действительных чисел равно 0 тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен 0.

б) Для того чтобы $|x| = |y|$, необходимо, чтобы $x = y$.

в) Выражения $x^2 - 2x + 1$ и $x^2 + 2x + 1$ не равны ни при каком положительном значении *x*.

г) Для того чтобы $x < 5$, достаточно, чтобы $x < 7$.

11. Дано предложение $\forall x \in D_f \left(x > 0 \to f(x) > 0\right)$. Найдите функции *f*, для которых это утверждение истинно:

а) $f(x) = \sin x$; б) $f(x) = |x|$; в) $f(x) = x^3$;

г) $f(x) = \dfrac{1}{x}$; д) $f(x) = 1 - x$.

12. Какое предложение является отрицанием предложения «если не *A*, то *B*»:

а) «Если не *A*, то не *B*»; б) «Если *A*, то не *B*»; в) «*A* и не *B*»;

г) «Не *A* и не *B*»; д) «*A* или не *B*» ?

13. Отрицанием высказывания «Некоторые студенты группы получили пятерку» за контрольную работу» является:

а) некоторые студенты группы не получили пятерку;

б) ни один студент группы не получили пятерку;

в) все студенты группы получили пятерку;

г) некоторые студенты группы получили пятерку, а некоторые – другую оценку.

14. Приведите пример, который опровергает утверждение «Каждое четное число, лежащее в промежутке $40 \le x \le 60$, делится на 3 или на 4».

Тест 2 (комбинаторика)

Вариант 1

1. Комбинация, содержащая 5 необязательно различных элементов без учета порядка записи, составленная из 8-элементного множества, является:

размещением из 8 по 5 элементов, перестановкой из 8 элементов,

сочетанием из 8 по 5 элементов, 5-элементным подмножеством.

2. Выберите верное равенство:

$A_{15}^6 \cdot 15! = C_{15}^6$; $C_{15}^6 \cdot 15! = A_{15}^6$; $A_{15}^6 \cdot 6! = C_{15}^6$; $C_{15}^6 \cdot 6! = A_{15}^6$.

3. Сколько существует подмножеств 5-элементного множества?

4. Найдите сумму $C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6$.

5. Сколькими способами из 6 ручек с синими чернилами и 4 ручек с красными чернилами можно составить набор, содержащий 2 ручки с синими чернилами и 2 ручки с красными чернилами?

6. Разрешается переставлять между собой цифры числа 12345 таким образом, чтобы крайняя правая цифра была отлична от 1 и 2. Сколько таких чисел можно составить?

7. Сколькими способами можно составить трехбуквенную комбинацию из букв К, Л, Н, А, О, если буквы могут повторяться, но на первом месте должна стоять согласная буква?

8. Сколько существует перестановок последовательности цифр 20122013?

9. Сколько существует двузначных чисел (первая цифра не 0), в десятичной записи которых содержится хотя бы одна из цифр 5 или 7?

10. Сколько существует шестизначных чисел, в десятичной записи которых все цифры различны и нет цифр 0 и 1?

11. Чему равен коэффициент при одночлене x^4y^3 в разложении $(x+y)^7$?

Вариант 2

1. Комбинация, содержащая 5 необязательно различных элементов, записанных в указанном порядке, взятых из 8-элементного множества, является:

   размещением из 8 по 5 элементов, перестановкой из 8 элементов,
   сочетанием из 8 по 5 элементов, 5-элементным подмножеством.

2. Выберите верное равенство:

   $A_{20}^{15} \cdot 15! = C_{20}^{15}$; $C_{20}^{15} \cdot 15! = A_{20}^{15}$; $A_{20}^{15} \cdot 20! = C_{20}^{15}$; $C_{20}^{15} \cdot 20! = A_{20}^{15}$.

3. Сколько существует подмножеств 4-элементного множества?

4. Найдите сумму $C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6$.

5. Сколькими способами из 5 ручек и 4 книг можно составить подарок, содержащий 3 ручки и 2 книги?

6. Сколькими способами могут встать в очередь 5 человек – Коля, Петя, Андрей, Вася, Иван – так, чтобы ни Коля, ни Петя не стояли бы на первом месте?

7. Сколькими способами можно составить трехбуквенную комбинацию из букв А, Б, В, Г, Д, Е, если буквы могут повторяться, но на первом месте должна стоять согласная буква, а на последнем – гласная?

8. Найдите число перестановок букв слова КОЛОКОЛ.

9. Сколько существует двузначных чисел (первая цифра не 0), в десятичной записи которых содержится хотя бы одна из цифр 6 или 9?

10. Сколько существует пятизначных чисел, в десятичной записи которых все цифры различны и нет цифр 0, 1 и 2?

11. Чему равен коэффициент при одночлене x^6y^2 в разложении $(x+y)^8$?

Вариант 3

1. Комбинация, содержащая 5 различных элементов, записанных в указанном порядке, взятых из 8-элементного множества, есть
   размещение из 8 по 5 элементов, перестановка из 8 элементов,
   сочетание из 8 по 5 элементов, 5-элементное подмножество.

2. Выберите верное равенство:
   $A_n^k = A_n^{n-k}$; $C_n^k = C_n^{n-k}$; $A_n^k = A_n^{n+k}$; $C_n^k = C_n^{n+k}$.

3. Сколько существует подмножеств 6-элементного множества?

4. На окружности отметили 7 точек. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

5. Сколькими способами из 5 открыток и 5 книг можно составить подарок, содержащий одну открытку и 3 книги?

6. На собрании должны выступить пять человек: А, Б, В, Г, Д. Сколькими способами можно расположить их в списке ораторов при условии, что А может выступать только вторым или третьим, а Б не может выступать последним?

7. Сколькими способами можно составить четырехбуквенную комбинацию из букв А, К, Л, М, О, если буквы могут повторяться, но на первых двух позициях должна стоять согласная буква, а на двух последних – гласная?

8. Сколько существует перестановок букв слова ОГОРОД, которые начинаются на согласную букву?

9. Сколько существует трехзначных чисел, в десятичной записи которых нет цифр 0, 1, 2 и 3?

10. Ученик выполняет тест, состоящий из 10 вопросов, каждый из которых имеет два варианта ответов – «верно» или «неверно». Сколько может получиться разных вариантов ответа на весь тест?

11. Чему равен коэффициент при одночлене x^4y^2 в разложении $(x+y)^6$?

Материалы к практическим занятиям

Тема 1. Высказывания. Логические связки

1. Какие из следующих предложений являются высказываниями? Объясните свой выбор. Какие из высказываний простые? Какие высказывания являются составными? Найдите их истинностное значение.
   а) 126 делится на 9; б) $x^2 + 2x + 1 = 0$; в) если в треугольнике все углы острые, то он прямоугольный; г) 325 делится на 3 или на 5; д) число 2 – простое или число 6 – составное; е) Луна – спутник Марса; ж) 5<3 и 4>1; з) 5<3 или 4>1; и) $\sin x = 1$; к) существуют такие числа x и y, что $x<y$; л) если $2 \cdot 2 = 5$, то все прямые плоскости пересекаются в одной точке; м) если 11 делится на 6, то 11 делится на 3.
2. Найдите логические значения высказываний:
   а) $(2=3) \to (4=2+3)$, б) $(3<4) \to (6\geq 5)$,
   в) $\overline{(5<3)} \wedge (3 \leq 2) \to (3<5)$, г) $(3>4)\vee(3+5>7) \to (3=3)\wedge(5<3)$.
3. Известно, что перед дождем кот Васька всегда чихает. Васька чихнул. Будет ли дождь? Обоснуйте ответ.
4. Высказываниям A, B, C, D соответственно приписаны значения *и*, *л*, *л*, *и*. Найдите истинностные значения каждого из следующих высказываний:
   а) $(A \vee B) \vee C$, г) $A \to (C \vee D)$,
   б) $C \to (A \wedge D)$, д) $(A \vee C) \leftrightarrow (C \wedge D)$,
   в) $A \to \rceil(B \wedge C)$, е) $D \leftrightarrow (A \to (A \vee D))$.
5. Высказывание $P \leftrightarrow Q$ истинно. Что можно сказать о логическом значении высказывания а) $P \leftrightarrow \rceil Q$, б) $(\rceil P \wedge Q) \leftrightarrow (P \vee Q)$, в) $Q \to P$, г) $\rceil P \to Q$?
6. Высказывание $P \leftrightarrow Q$ ложно. Что можно сказать о логическом значении высказывания а) $P \leftrightarrow \rceil Q$, б) $\rceil P \leftrightarrow Q$?
7. Высказывание $P \to Q$ истинно, а высказывание $P \leftrightarrow Q$ ложно. Что можно сказать о логическом значении высказывания а) $Q \to P$, б) $\rceil P \leftrightarrow Q$?

Тема 2. Формулы. Законы логики

1. Составьте таблицы истинности для следующих формул:
   а) $A \to (A \to B)$,
   б) $A \to \rceil(B \wedge C)$,
   в) $(A \to \rceil B) \leftrightarrow (B \to \rceil A)$,
   г) $(A \to B \wedge C) \vee (\rceil A \wedge B)$.

2. Найдите истинностное значение формул:

а) $((A \vee \rceil B) \wedge \rceil C) \leftrightarrow C$, если A-и, B-и, C-и.

б) $\rceil((A \to B) \vee (B \to \rceil A))$, если B-л,

в) $(A \to (\rceil A \to (B \vee \rceil B))) \to A$, если A-и,

г) $A \wedge (B \to \rceil A)$, если $A \wedge B$ - и,

д) $\rceil(A \vee B) \to (C \vee \rceil D)$, если $(\rceil C \wedge B) \to (A \vee \rceil D)$ - л.

3. Докажите равносильность следующих формул:

а) $A \to B$ и $\rceil A \vee B$,

б) $(A \wedge B) \to (A \wedge C)$ и $\rceil A \vee \rceil B \vee C$.

в) $A \to (B \to C)$ и $(A \to B) \to C$,

г) $(\rceil A \to B) \wedge (\rceil B \to \rceil C)$ и $B \vee \rceil(A \to C)$.

4. Докажите равносильности:

а) $A \leftrightarrow B \equiv (\rceil A \vee B) \wedge (\rceil B \vee A)$, б) $P \vee (\rceil P \wedge Q) \equiv P \vee Q$.

5. Докажите или опровергните тождественную истинность формул:

а) $((A \to B) \wedge A) \to B$, б) $(A \to B) \to ((C \wedge A) \to B)$,

в) $(A \to B) \to ((C \wedge A) \to (B \wedge D))$.

6. Рассуждения ученика: «Известно, что если натуральное число оканчивается нулем, то оно делится на 5. Данное число не оканчивается нулем, поэтому оно не делится на 5». Прав ли ученик?

7. Следующие формулы преобразуйте в равносильные, которые не содержат знака импликации, а отрицание относится только к переменным:

а) $\rceil(A \to B)$, б) $\rceil(A \to (B \to A))$, в) $\rceil(\rceil(A \vee B) \to (C \to A))$.

Тема 3. Предикаты и кванторы

1. Укажите предикаты, найдите их множества истинности:

а) $x^2 > 1, x \in \mathrm{R}$,

б) $x^2 + \sin x, x \in \mathrm{R}$,

в) $x^2 - x - 2 = 0, x \in \mathbf{N}$,

г) целое число x делится на 2,

д) любое целое число x делится на 2,

е) треугольник x – равнобедренный,

ж) $2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 2 \cdot (2 + 3)$,

з) $2 \cdot x + 3 \cdot x = 6x, x \in \mathbf{Z}$,

и) натуральное число x делит любое натуральное число y, к) существует натуральное число x, которое делит любое натуральное число y.

2. Прочитайте высказывания:

а) $\exists n \in \mathbf{N}\,(n \vdots 2)$, б) $\exists n, m \in \mathbf{N}\,(n \vdots m)$,

в) $\forall n \in \mathbf{N}\,(n \vdots 5)$, г) $\forall n \in \mathbf{N}\ \exists m \in \mathbf{N}\,(n \vdots m)$.

3. Даны двуместные предикаты: $P(a,b)$: «Прямая a параллельна прямой b», $Q(a,\alpha)$: «Прямая a лежит в плоскости α», $S(a,\alpha)$: «Прямая a параллельна плоскости α». Сформулируйте высказывания:

а) $\forall \alpha\, \exists a\, Q(a,\alpha)$, б) $\forall \alpha\, \exists b\, S(b,\alpha)$,

в) $\exists a\, \exists b\, P(a,b)$, г) $\exists b\, \forall \alpha\, S(b,a)$.

4. Запишите символически следующие высказывания:

а) при некоторых натуральных значениях y имеет место равенство $3 - y = y - 1$,

б) любое действительное число x является решением неравенства $x^2 + 3 > 0$,

в) есть натуральные числа, кратные 8,

г) всякое число имеет делитель, равный 1,

д) существуют такие натуральные числа c и d, что $c \cdot d = 6$.

5. Найдите множества истинности предикатов $P(x) \wedge Q(x)$, $P(x) \vee Q(x)$, $\rceil P(x)$, $\rceil Q(x)$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – следующие предикаты:

а) $-2 < x < 4$ и $|x| \leq 3$ ($x \in \mathbf{R}$), б) $x^2 + 2x - 3 = 0$ и $x^2 + 3x - 4 = 0$ ($x \in \mathbf{R}$),

в) $x > 2$ и $x \leq 2$ ($x \in \mathbf{R}$), г) 2 делит x и 4 делит x ($x \in \mathbf{Z}$).

6. Изобразите на координатной плоскости множества истинности следующих предикатов:

а) $x^2 = y^2$; б) $x^2 + y^2 \leq 9$; в) $(x>0) \wedge (y>0)$; г) $(x>0) \vee (y<0)$.

7. Изобразите на координатной плоскости области истинности предикатов $P(x,y) \wedge Q(x,y)$, $P(x,y) \vee Q(x,y)$, $\rceil P(x,y)$, $\rceil Q(x,y)$, где $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – следующие предикаты:

а) $x > 0$ и $y > 0$, б) $y - x > 1$ и $y + x > 1$,

в) $|x + y| < 2$ и $|x - y| < 2$, г) $(x+1)^2 + y^2 \leq 4$ и $(x-1)^2 + y^2 \leq 4$.

8. Выясните, равносильны ли следующие предикаты:

а) $x^2 + 2x - 3 > 0$ и $(x < 3) \wedge (x > 1)$ ($x \in \mathbf{R}$),

б) $|x| \geq 3$ и $x^2 \geq 15$ ($x \in \mathbf{R}$),

в) $|x| \leq 3$ и $x^2 \leq 15$ ($x \in \mathbf{Z}$), г) $2x = y$ и $4x^2 = y^2$ ($x \in \mathbf{R}$),

д) $2x = y$ и $4x^2 = y^2$ ($x \in \mathbf{R}^+$),

е) «x делит y и y делит x» и $x = y$ ($x, y \in \mathbf{Z}$).

9. Запишите, используя язык предикатов, следующие высказывания: уравнение $f(x) = 0$ в $\mathbf{R}$:

   а) не имеет корней, б) имеет корень, в) имеет ровно один корень, г) имеет более одного корня, д) имеет не более одного корня, е) имеет два корня, ж) имеет ровно 2 корня, з) имеет более двух корней.

10. Используя предикат $x \mid y$ – «x делит y», запишите на языке формул следующие высказывания:

    а) некоторые целые числа делятся на 3,
    б) любое целое число делится на 2 и на 3,
    в) всякое четное число делится на 4,
    г) любые два натуральных числа имеют общее кратное,
    д) если целое число делится на 2 и на 3, то оно делится на 6?
    е) сумма любых двух четных целых чисел является четным числом, а их произведение кратно 4,
    ж) существует натуральное простое число,
    з) существуют нечетные простые числа.

Тема 4. Построение отрицания к высказываниям с кванторами

1. Пусть каждое из следующих утверждений неверно. Сформулируйте верные утверждения.
   1) Все шары в урне красные.
   2) Некоторые шары в урне красные.
   3) Все равнобедренные треугольники прямоугольные.
   4) Все студенты нашей группы были на дискотеке.
   5) Некоторые студенты группы были на дискотеке.
2. Докажите или опровергните следующие высказывания:
   а) разность любых двух натуральных чисел есть число натуральное,
   б) существуют правильные многоугольники,
   в) сумма любых трех последовательных натуральных чисел кратна 3,
   г) всякое двузначное число, записанное одинаковыми цифрами, кратно 11,
   д) любое натуральное число является корнем уравнения $x^2 + 1 = 7$,
   е) в некоторых параллелограммах диагонали не равны,
   ж) среди чисел 3, 17, 39, 115, 212 есть хотя бы одно, кратное 7.

3. Прочитайте высказывания и определите их значения истинности ($a,b,x \in \mathbf{R}$):

   а) $\forall x\ \exists a\ (3x+1=ax)$; б) $\exists x\ \forall a\ (3x+1=ax)$;

   в) $\exists b\ \forall a\ \exists x\ (x^2+ax+b=0)$; г) $\exists a\ \forall b\ \exists x\ (x^2+ax+b=0)$.

4. Запишите символически высказывания, их отрицания, определите их истинностное значение.

   а) Во множестве натуральных чисел есть наименьший (наибольший) элемент.

   б) Любые два рациональных числа либо равны, либо одно из них больше другого.

5. Напишите символически определения четной, нечетной, периодической функции и их отрицания.

6. Является ли функция $f(x) = (x+1)^2$ четной, нечетной, периодической?

7. Запишите определение возрастающей (на D_f) функции, его отрицание. Проверьте, что функция $f(x) = (x+1)^2$ не возрастает на $\mathbf{R}$.

8. Запишите определение ограниченной (сверху, снизу) последовательности. Постройте отрицание. Исследуйте на ограниченность последовательности: $a_n = (-1)^n$, $b_n = n$.

9. С помощью кванторов составьте из данного предиката высказывания всеми возможными способами. Установите истинностные значения полученных высказываний и их отрицаний.

   а) x делится на y, (x, y – целые числа), б) x – отец y (x, y – люди),

   в) $x+2y=1$ (x, y – действительные числа).

10. Докажите или опровергните следующие высказывания:

   а) некоторые параллелограммы имеют ось симметрии,

   б) все параллелограммы имеют ось симметрии,

   в) существуют параллелограммы, не имеющие осей симметрии,

   г) диагонали любого ромба не равны между собой,

   д) всякий прямоугольник является квадратом,

   е) некоторые числа кратны 2 и 7,

   ж) все числа положительны или отрицательны,

   з) число n^2+1 делится на $n+1$ при любом $n \in \mathbf{N}$,

   и) функция $f(x) = x+1$ возрастает,

   к) функция $f(x) = x+1$ убывает.

Тема 5. Отношение следования. Необходимые и достаточные условия

1. Справедливы ли указанные следствия:

а) $x > 2 \Rightarrow x^2 > 4$, б) $x^2 > 4 \Rightarrow x > 2$,

в) $\left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 2 \end{array}\right. \Rightarrow x^2 - 3x + 2 \geq 0$, г) $x^2 - 3x + 2 \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 1 \end{cases}$,

д) $x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 9 = 0$, е) $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x + 3 = 0$,

ж) $x \leq 3 \Rightarrow x < 3$, з) $x < 3 \Rightarrow x \leq 3$?

2. В каждом из следующих предложений вместо многоточия поставьте один из терминов «необходимо», «достаточно», «необходимо и достаточно» так, чтобы получилось истинное высказывание:

а) Для того чтобы сумма двух целых чисел была четным числом … , чтобы каждое слагаемое было четным.

б) Чтобы число делилось на 3 … , чтобы оно делилось на 6.

в) Для того чтобы число делилось на 10… , чтобы оно делилось на 2 и на 5.

г) Для того чтобы $(x-3)(x+2)(x-5) = 0$ … , чтобы $x = 3$.

д) Для того чтобы четырехугольник был прямоугольником … , чтобы его диагонали были равны.

е) Для того чтобы было верно $\frac{1}{x} < 1$ … , чтобы $x > 1$.

ж) Для того чтобы было верно $\frac{1}{x} < 1$ … , чтобы $x > 1$ или $x < 0$.

з) Чтобы треугольники были равны … , чтобы они были подобны.

и) Чтобы четырехугольник был ромбом … , чтобы его диагонали были равны.

Тема 6. Логическое строение теоремы

1. В каждом из приведенных утверждений выделите условие и заключение. Какие из утверждений верны? Сформулируйте истинные предложения разными способами: на языке «если, то» и на языке необходимых и достаточных условий.

1) Если произведение двух целых чисел делится на 6, то хотя бы один из сомножителей делится на 6.

2) Для того чтобы число делилось на 2, необходимо, чтобы оно оканчивалось нулем.

3) Сумма двух нечетных чисел есть нечетное число.

4) Не существует целого числа, куб которого оканчивался бы цифрой 2.

5) Для того чтобы $a^3 = a^2$ необходимо, чтобы a=1.

6) Квадрат любого четного числа делится на 4.

7) Для того чтобы натуральное число делилось на 9, достаточно, чтобы сумма его цифр делилась на 9.

8) Произведение любых трех последовательных натуральных чисел делится на 6.

9) Произведение двух чисел равно 0, если хотя бы один из сомножителей равен 0.

10) Для того чтобы произведение двух чисел было положительно, необходимо, чтобы они были положительны.

11) Вертикальные углы равны.

12) В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

13) Квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов катетов.

14) Любая сходящаяся последовательность ограничена.

15) Любая ограниченная последовательность сходится.

16) В равностороннем треугольнике все углы равны.

17) Во всяком треугольнике против большей стороны лежит больший угол.

2. Выделите составные части теорем и запишите теоремы символически. Для каждой из них постройте обратную, противоположную и обратно-противоположную теоремы. Выясните, какие из них верны.

а) теорема Пифагора;

б) теорема о средней линии треугольника;

в) теорема о свойстве диагоналей ромба;

г) теорема о произведении двух чисел, равном 0;

д) необходимое условие сходимости числовой последовательности;

е) теорема о произведении бесконечно малых последовательностей.

Тема 7. Способы задания множества

1. Является ли число 2 элементом множеств:

$A = \{1, 3, 5, 6\}$, $B = \{-3, 0, 1, 2, 4\}$, $C = \left\{x \mid x^2 = -4x\right\}$?

2. Верно ли, что $\{1,2\} \in \{\{1,2,3\}, \{1,3\}, 1, 2\}$?

3. Приведите пример таких множеств A, B и C, что $A \in B$, $B \in C$, но $A \notin C$. Может ли быть так, что $A \in C$?

4. Задайте с помощью характеристического свойства:

а) множество всех положительных чисел, б) множество всех отрицательных чисел, в) множество всех неотрицательных чисел, г) множество всех неположительных чисел, д) множество $A = \{1, 2, 3\}$, е) Ø, ж) множество всех простых чисел.

5. Опишите словесно множества:

а) $\{x^2 | x\in\mathbf{Z}\}$, б) $\{2x | x\in\mathbf{N}\}$, в) $\{(x, y) | x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}, x^2+y^2=4\}$.

6. Запишите множество, перечислив его элементы:

а) $A = \{x\in\mathbf{N} \mid x<5\}$,

б) $B = \{x\in\mathbf{N} \mid |x|<5\}$,

в) $C_1 = \{x\in\mathbf{Z} \mid (x^2-1)(2x-1)(x^2-2) = 0\}$,

г) $C_2 = \{x\in\mathbf{Q} \mid (x^2-1)(2x-1)(x^2-2) = 0\}$,

д) $C_3 = \{x\in\mathbf{R} \mid (x^2-1)(2x-1)(x^2-2) = 0\}$,

е) $D = \{x\in\mathbf{R} \mid (x-1)\sqrt{-x^2+x+2} \le 0\}$,

ж) $E = \{(x, y) \mid x\in\mathbf{Z}, y\in\mathbf{Z}, |x|+|y|=2\}$.

Постройте на плоскости множество $\{(x, y) \mid x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}, |x|+|y|=2\}$.

7. Постройте на координатной прямой числовые множества. Запишите их другим способом.

а) $[-3, 2)$, б) $\{x\in\mathbf{R} \mid |x-2|<3\}$, в) $\{x\in\mathbf{Z} \mid |x-1{,}5|\le 2\}$,

г) $\{x\in\mathbf{N} \mid |x-3|\le 5\}$, д) $\{x\in\mathbf{R} \mid |x+1|>4\}$.

Задачи на нахождение геометрического места точек (ГМТ)

8. Даны точки A и B. Найдите множество всех точек M плоскости, таких, что треугольник AMB – тупоугольный.

9. $ABCD$ – квадрат. Найдите множество точек: $\{M\in\mathbf{R}^2|$ сумма расстояний от M до (AB) и (CD) равна сумме расстояний от M до (AD) и $(BC)\}$.

10. $ABCD$ – квадрат, O – его центр. Найдите множество:

$$\{M \mid |OM| < \min\{|AM|,|BM|,|CM|,|DM|\}\}.$$

11. Найдите ГМТ пространства, удаленных на данное расстояние от данной прямой.

Тема 8. Равные множества. Отношение включения

1. Какие из следующих утверждений являются верными:

а) $\{1,2\}\subseteq\{1,2,3\}$, $\{3,4\}\subseteq\{\{3,4\},5\}$, $\{3,4\}\in\{\{3,4\},5\}$,

б) $3\subseteq\{1,2,3\}$, $\{3\}\subseteq\{1,2,3\}$, $3\in\{1,2,3\}$, $\{3\}\in\{1,2,3\}$,

в) $\varnothing\subseteq\{1,2,3\}$, $\varnothing\subseteq\varnothing$, $\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$, $\varnothing\in\varnothing$, $\varnothing\in\{\varnothing\}$?

2. Равны ли следующие множества? Является ли одно из них подмножеством другого?

а) $\{1,2,3,4\}$ и $\{4,3,2,1\}$, б) $\{a,b,a,c\}$ и $\{a,b,c\}$,

в) $\{1,2,3\}$ и $\{1,\{2,3\}\}$, г) Ø и {Ø},

д) $\{x \in \mathrm{N} \mid x \vdots 10 \text{ и } x \vdots 15\}$ и $\{x \in \mathrm{N} \mid x \vdots 150\}$,

е) $\{x \in \mathrm{N} \mid x \vdots 3 \text{ и } x \vdots 5\}$ и $\{x \in \mathrm{N} \mid x \vdots 15\}$,

ж) $\{x \in \mathrm{R} \mid x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0\}$ и $\{1,2,3,4\}$,

з) множество A всех прямоугольников и множество B всех четырехугольников с равными диагоналями,

и) $A = \{2k+1 \mid k \in \mathbf{Z}\}$ и $B = \{2k+1 \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

3. Для заданного множества A найдите множество всех его подмножеств $\mathbf{B}(A)$: а) $A=\{1, 2, 3\}$, б) $A=\{0\}$, в) $A=$ Ø.

4. Докажите: $S \subseteq P$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{B}(S) \subseteq \mathbf{B}(P)$.

5. Докажите:

а) если $A \subseteq B$, $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$,

б) если $A \subseteq B$, $B \subseteq C$, $A \neq B$, то $A \neq C$,

в) если $A \subseteq B$, $B \subseteq C$, $B \neq C$, то $A \neq C$,

г) если $A \subseteq B$, $B \subseteq C$, $C \subseteq A$, то $A=B=C$,

д) если $A \subseteq \varnothing$, то $A = \varnothing$.

6. Выясните, равны ли множества:

а) $A = \left\{ \dfrac{5k-3}{4} \mid k - \text{целое} \right\}$ и $B = \left\{ \dfrac{5k+2}{4} \mid k - \text{целое} \right\}$,

б) $A = \{3k+1 \mid k - \text{целое}\}$ и $B = \left\{ \dfrac{3k-1}{2} \mid k - \text{целое} \right\}$,

в) $\{x \in \mathbf{N} \mid x \vdots 20\}$ и $\{x \in \mathbf{N} \mid x^2 \vdots 20\}$.

Тема 9. Операции над множествами

1. Для подмножеств A, B множества U найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \oplus B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$:

а) $A=\{д, о, м\}$, $B=\{м, о, р, е\}$, U – множество букв русского алфавита,

б) $A = \{1,3,4,6\}$, $B = \{3,4,6,8,9\}$, $U = \{x \in \mathbf{N} \mid x < 10\}$,

в) $A = [-2,3]$, $B = (1,5)$, $U=\mathbf{R}$,

г) $A = (-\infty,2)$, $B = [1,4]$, $U=\mathbf{R}$,

д) $A=[1,+\infty)$, $B=(-2,3]$, $U=\mathbf{R}$, е) $A=[1,+\infty)$, $B=(-2,0)\cup\{1\}$, $U=\mathbf{R}$,

ж) $A=[-3,3]$, $B=\{-3,3\}$, $U=\mathbf{R}$,

з) A – множество всех прямоугольников, B – множество всех ромбов, U – множество всех четырехугольников.

2. Найдите объединение множеств точек всех треугольников плоскости, вписанных в данную окружность.
3. Найдите пересечение множеств точек всех треугольников плоскости, вписанных в данную окружность.
4. Постройте два таких неравных треугольника, для которых является правильным треугольником их а) пересечение, б) объединение, в) симметрическая разность.
5. Докажите утверждения:

   а) $A\subseteq A\cup B$, б) $A\cap B\subseteq A$, в) если $A\subseteq B$, то $(A\cap C)\subseteq(B\cap C)$.
6. Докажите равносильность следующих трех условий: $A\subseteq B$, $A\cup B=B$, $A\cap B=A$.
7. Известно, что $A\cup B=A\cup C$. Можно ли отсюда сделать вывод, что $B=C$? А если известно, что $A\cap B=A\cap C$?
8. Докажите утверждения:

   а) $A\setminus B=A\Leftrightarrow B\setminus A=B$, б) $(B\cup A)\setminus B=A\Leftrightarrow A\cap B=\varnothing$,

   в) $A\setminus B=A\cup B\Leftrightarrow B=\varnothing$, г) $A\cap B=A\setminus B\Leftrightarrow A=\varnothing$,

   д) $A\subseteq B\cup C\Leftrightarrow A\setminus B\subseteq C$, е) $A\subseteq B\Rightarrow A\setminus C\subseteq B\setminus C$,

   ж) $C=A\setminus B\Rightarrow B\cap C=\varnothing$, з) $A\not\subset B\Rightarrow A\setminus B=\varnothing$.
9. Найдите пересечение всех интервалов вида $\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$, $n\in\mathbf{N}$.

Тема 10. Прямое произведение множеств

1. Перечислите элементы множеств $A\times B$, $B\times A$, $B\times B$, если

   а) $A=\{1,2,3\}$, $B=\{c,d\}$, б) $A=\{o,e\}$, $B=\{p,н\}$.
2. Постройте на плоскости множества $A\times B$ и $B\times A$, если

   а) $A=\{1,2,3\}$, $B=\{3,4\}$, д) $A=[1,+\infty)$, $B=(-2,2)\cup\{1\}$,

   б) $A=[-2,3]$, $B=(1,5)$, е) $A=[-3,3]$, $B=\{-3,3\}$,

   в) $A=(-\infty,2)$, $B=[1,4]$, ж) $A=(-5,2]$, $B=\mathbf{R}$,

   г) $A=[1,+\infty)$, $B=(-2,3]$, з) $A=(-\infty,1)$, $B=[1,+\infty)$.
3. Выясните, верны ли следующие равенства.

   а) $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$;

б) $(A\times B)\cup(B\times A)=(A\cup B)\times(A\cup B)$;
в) $(A\setminus B)\times C=(A\times C)\setminus(B\times C)$.

Тема 11. Диаграммы Эйлера–Венна

1. На диаграммах Эйлера–Венна изобразите множества:

   а) $A\setminus(B\setminus C)$, б) $(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$, в) $\overline{A\cap\overline{B}\cap C}$.

2. Какое из следующих соотношений выполняется для множеств A и B: $A=B$, $A\subset B$, $B\subset A$, A и B не пусты и не пересекаются, A и B пересекаются, но не связаны отношением включения. Изобразите множества A и B на диаграмме Эйлера–Венна.

   а) $A=[-1,5)$, B – множество всех четных целых чисел.

   б) A – множество всех нечетных целых чисел, $B=\{-3,-1,7,15,21\}$.

   в) A – множество всех простых чисел, $B=[-\infty,2)$.

   г) A – множество всех квадратов на плоскости, B – множество всевозможных параллелограммов.

   д) $A=\{x\,|\,x^2+2x=3\}$, $B=\{x\,|\,(x+3)(x^2+1)(x^2+2x+1)=0\}$.

   е) $A=[-2,3]$, $B=[2,\infty)$.

   ж) $A=\{x-\text{число}\,|\,x^2=20+x\}$, $B=\{-5,0,4\}$.

   з) $A=\{x-\text{число}\,|\,9x-14=x^2\}$, B – множество всех простых чисел.

   При решении следующих задач введите необходимые множества и изобразите их с помощью диаграмм Эйлера–Венна.

3. В группе из 25 студентов 12 человек играет в волейбол, 9 человек – в баскетбол, а двое – и в волейбол, и в баскетбол. Сколько студентов группы не играет ни в одну из этих игр?

4. В лагере отдыхают 100 детей. Известно, что 6 из них занимаются в драмкружке, 20 – спортсмены и 25 поют в хоре. При этом 3 спортсмена занимаются в драмкружке, 6 человек занимаются спортом и поют в хоре, 2 артиста из драмкружка поют в хоре, а 1 человек успевает заниматься всем – и театром, и спортом, и пением. Сколько человек не занимается ничем из перечисленного?

5. Каждый из 37 членов строительной бригады владеет хотя бы одной из трех специальностей: плотника, каменщика, монтажника. Известно, что в бригаде 15 плотников, 13 каменщиков и 16 монтажников, причем 2 члена бригады владеют специальностями плотника и каменщика, 3 – плотника и монтажника и 4 – каменщика и монтажника. Сколько рабочих владеет

всеми тремя специальностями? Только одной специальностью? Сколько монтажников не является плотниками?

6. Каждый из 25 студентов группы изучает хотя бы один из двух языков – английский и немецкий. Известно, что 17 человек изучает английский язык, а 12 человек – немецкий. Сколько студентов изучают оба этих языка?
7. В группе 36 студентов. Известно, что среди них спортсменов – 21, занимающихся в кружках – 20, учащихся без троек – 22, причем каждый студент группы входит в какую-нибудь из перечисленных категорий. Спортсменов и занимающихся в кружках – 11, спортсменов и учащихся без троек – 12, занимающихся в кружках и учащихся без троек – 13. Сколько студентов, одновременно занимающихся в кружках и спортом, учится без троек?
8. Сколько чисел среди первых 100 натуральных чисел не делится ни на 4, ни на 6, ни на 10?

Тема 12. Доказательство теоретико-множественных тождеств

1. Упростите выражения, используя основные теоретико-множественные тождества:

   а) $A\cup(A\cup B)$, б) $A\cap(A\cup B)$, в) $A\cup(A\cap B)$,
   г) $(A\cup\overline{B})\cap(A\cup B)$, д) $\overline{A\cup\overline{B}}$, е) $A\cup(\overline{A}\cap B)$,
   ж) $\overline{A\cap\overline{B}}\cup B$, з) $(\overline{A}\cap B\cap C)\cup(A\cap B\cap C)\cup\overline{B}\cup\overline{C}$.
2. Докажите теоретико-множественные тождества тремя способами (с помощью кругов Эйлера, поэлементно и тождественными преобразованиями):

   а) $A\setminus B=A\cap\overline{B}$,
   б) $B\cup(A\setminus B)=A\cup B$,
   в) $B\cap(A\setminus B)=\varnothing$,
   г) $A\cap B=A\setminus(A\cap\overline{B})$,
   д) $A\setminus(A\setminus B)=A\cap B$,
   е) $(A\setminus B)\setminus C=(A\setminus C)\setminus(B\setminus C)$,
   ж) $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$,
   з) $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$,
   и) $A\cup(B\setminus C)=(A\cup B)\cap(A\cup\overline{C})$,
   к) $A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus(A\cap C)$,
   л) $(A\oplus B)\cap C=(A\cap C)\oplus(B\cap C)$.

Тема 13. Метод математической индукции

1. Докажите для прогрессий формулы общего члена: $a_n=a_1+d(n-1)$, $b_n=b_1q^{n-1}$.

2. Докажите: $|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$ для любого числа слагаемых.
3. Докажите, что сумма кубов любых трех последовательных натуральных чисел делится на 9.
4. Докажите, что для любого $n \in \mathbf{N}$ верно:

а) $1 + 3 + \ldots + (2n-1) = n^2$, б) $1 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

в) $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n\cdot(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$, г) $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$,

д) $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + n\cdot(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$,

е) $\left(1 - \dfrac{1}{4}\right)\left(1 - \dfrac{1}{9}\right) \ldots \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{n+1}{2n}$,

ж) $\dfrac{1}{1\cdot 4} + \dfrac{1}{4\cdot 7} + \ldots + \dfrac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)} = \dfrac{n}{3n+1}$.

5. Пусть $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+1} = a_n - a_{n-1}$ при $n > 2$. Докажите, что $a_{n+6} = a_n$ для любого $n \in \mathrm{N}$.
6. Докажите, что для любого $n \in \mathbf{N}$ верно: а) $3^n \geq n \cdot 2^n$, б) $2^n \geq n$.
7. Выясните, для каких $n \in \mathbf{N}$ верно: а) $2^n \geq n^2$, б) $2^n \geq 2n + 1$.
8. Докажите, что любые n прямые, проведенные через точку, делят плоскость на непересекающихся $2n$ частей.
9. Докажите, что для любого натурального $n \geq 3$ можно построить n-угольник, имеющий три острых угла.
10. Докажите, что n-элементное множество имеет 2^n подмножеств.
11. Докажите, что число, записанное с помощью 3^5 единиц, делится на 3^5.
12. Докажите, что любое $n \in \mathbf{N}$ представимо в виде суммы целых неотрицательных степеней двойки.
13. Плоскость поделена несколькими прямыми на области. Докажите, что их можно раскрасить в 2 цвета так, что любые две соседние области будут окрашены в разный цвет.
14. Из первых $2m$ натуральных чисел выбрали произвольно $n+1$ число. Докажите, что среди них найдутся два, одно из которых делит другое.
15. Докажите, что $4^n + 15n - 1$ делится на 9 при любом $n \in \mathbf{N}$.

Тема 14. Метод перебора вариантов

1. Сколько существует двоичных кодов длиной 4? Перечислите все такие коды.
2. В детский сад привезли кубики красного и синего цветов. Каждому ребенку дали по 4 кубика. Сколько различных башенок можно составить?
3. В азбуке Морзе любой символ можно закодировать последовательностью точек и тире. Общее количество знаков в коде – от одного до пяти. Сколько различных символов можно закодировать с помощью азбуки Морзе?
4. Напишите в алфавитном порядке все слова (без повторяющихся букв), составленные из букв А, Б, В.
5. Напишите в алфавитном порядке все слова, составленные из букв слова МАМА.
6. В забеге участвовали Иванов, Петров, Сидоров. Были даны следующие прогнозы. 1) Победит Иванов. 2) Сидоров обгонит Петрова. 3) Петров финиширует следом за Ивановым. 4) Сидоров не победит. Известно, что четное число прогнозов оказались верными. Как финишировали бегуны?
7. Сороконожки и трехголовые драконы вместе имеют 26 голов и 298 ног. Сколько ног у трехголового дракона?
8. Имеется 20 одинаковых квадратов. Сколько различных прямоугольников можно составить, используя все квадраты или частично? А если квадратов 100?
9. Имеются монеты достоинством 3 и 5 коп. Перечислите все способы, которыми можно набрать 78 коп.
10. Имеется 4 книги. Сколькими способами можно составить из них подарок?
11. В азбуке Брайля (для слепых) каждый символ кодируется с помощью 6 точек. На некоторых из них имеются выпуклости, легко определяемые осязанием. Сколько символов можно закодировать с помощью азбуки Брайля?
12. На Новый год были куплены конфеты для подарков. После того как одну конфету кто-то съел, при раскладывании их по 2, 3, 5 штук одной конфеты не хватало. По 7 их удалось разложить. Сколько всего было куплено конфет? (Известно, что их < 300.)
13. Разговор между двумя друзьями, не видевшимися много лет:

    – У меня трое сыновей. Произведение их лет равно 36, а сумма – номеру проходящего мимо автобуса.

    – Это мне ни о чем не говорит.

– А старший сын у меня рыжий.
– Сейчас мне все ясно.
Сколько лет детям? Какой автобус проходил мимо?

Тема 15. Бесформульная комбинаторика. Правило произведения

1. Сколько всего существует а) двузначных, б) трехзначных чисел?
2. Сколько существует двузначных чисел с разными цифрами? А трехзначных?
3. На плоскости имеется 10 точек.
   а) Сколько существует отрезков с концами в этих точках?
   б) Сколько можно построить треугольников с вершинами в этих точках?
4. Сколько диагоналей в выпуклом 11-угольнике?
5. Двадцать пять студентов группы поздравили друг друга с Новым годом открытками. Сколько было подарено открыток?
6. Двадцать пять студентов группы обменялись рукопожатиями. Сколько было сделано рукопожатий?
7. В турнире участвовало 20 команд. Сколько было проведено матчей, если каждые две команды сыграли друг с другом?
8. Можно ли устроить тренировочный турнир так, чтобы в нем участвовали 11 команд и каждая команда сыграла ровно три матча? А если команд 8?
9. Пусть a, b, c, d – какие-то четыре разные цифры (не нули). Сколько из них можно составить различных четырехзначных чисел, у которых все цифры различны?
10. Сколько существует двузначных чисел, цифры которых идут в убывающем (возрастающем) порядке?
11. Сколько существует трехзначных чисел с описанным свойством?
12. Имеется краска белого, красного и синего цветов. Сколькими способами можно раскрасить трехцветный флаг?
13. Докажите, что в любой компании, состоящей из 11 человек, найдутся двое, имеющие одинаковое число знакомых в этой компании.
14. Докажите, что в любой компании из шести человек найдутся трое или попарно знакомых или попарно незнакомых.
15. В ящике 40 шариков: 17 зеленых, 12 синих, 5 красных и 6 белых. Какое наименьшее число шариков надо вынуть, чтобы среди них наверняка оказалось: а) 12 шариков одного цвета, б) 4 шарика разного цвета?

16. К вершине горы ведет 7 троп. Сколькими способами можно подняться на вершину горы и вернуться обратно? А если возвращаться нужно другой дорогой?
17. Кодовый замок чемодана представляет собой три колесика с пронумерованными от 0 до 9 делениями. Сколько различных шифров существует?
18. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1,2,3,4,5, если: а) цифры не повторяются, б) цифры могут повторяться?
19. В корзине сидят котята – 2 черных, 2 рыжих и 1 полосатый. Сколькими способами можно выбрать трех котят так, чтобы все они были разной окраски?
20. Сколько существует пятизначных чисел, сумма цифр которых равна трем, а цифра 1 встречается не более одного раза?
21. В лыжных соревнованиях, в которых участвовало 100 спортсменов, все спортсмены получили номера от 1 до 100. Сколько спортсменов получили номера без цифры 2 и цифры 5?
22. Сколько различных делителей имеет число $3^5 \cdot 5^4$?
23. Преподаватель может поставить студенту одну из четырех возможных отметок: 2, 3, 4, 5. Три человека сдают экзамен. Сколькими способами им могут быть поставлены отметки?
24. У Васи на куртке 3 кармана. Сколькими способами он может положить в них две одинаковые монеты?
25. Сколькими способами 3 юношей могут пригласить на танец 3 девушек из 6?
26. Сколько существует четырехзначных чисел: а) делящихся на 5, в записи которых нет одинаковых цифр; б) в записи которых хотя бы раз встречается цифра 5?
27. Даны две параллельные прямые. На одной прямой отмечено 3 точки, на другой – 4 точки. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках? Обобщение задачи: на одной прямой – n точек, на другой – k точек. Вопрос тот же.

Тема 16. Основные формулы комбинаторики

1. Сколько трехбуквенных слов можно составить из букв А,Б,В,Г,Д,Е? А если буквы не должны повторяться?
2. Сколько 3-значных кодов существует у кодового замка с одновременным нажатием кнопок?

3. Сколькими способами в группе из 25 человек можно выбрать трех делегатов для участия в конференции?
4. Сколькими способами в группе из 25 человек можно выбрать старосту, зам. старосты и профорга?
5. Имеется 10 стульев. Сколькими способами могут разместиться на них 5 человек?
6. В классе изучают 10 предметов. Сколькими способами можно составить расписание на день, если с утра должно быть 6 разных уроков?
7. На окружности отмечено 8 точек. Сколько можно построить: а) хорд, б) треугольников с вершинами в этих точках?
8. Сколько существует трехзначных чисел? Сколько среди них таких, у которых: а) все цифры различны, б) первая и третья цифры равны, в) все цифры нечетные, г) все цифры четные?
9. Сколькими способами можно назначить в патруль трех солдат и одного офицера, если имеется 15 солдат и 4 офицера?
10. В лыжной секции занимаются 10 мальчиков и 8 девочек. Сколькими способами можно сформировать команду из четырех лыжников и трех лыжниц?
11. В группе 25 студентов. Сколько существует различных вариантов присутствия студентов на занятии?
12. Каждого из 7 студентов можно отправить на практику в одну из двух школ. Сколькими способами это можно сделать?
13. В вазе стоят 10 красных и 5 розовых гвоздик. Сколькими способами можно выбрать из вазы:

    а) 4 гвоздики одного цвета;

    б) 4 гвоздики, среди которых половина красных;

    в) 5 гвоздик, среди которых больше красных?
14. На двух параллельных прямых расположено 6 и 9 точек соответственно. Сколько четырехугольников с вершинами в этих точках можно построить?
15. Сколькими способами можно переставить буквы слова ОГОРОД так, чтобы никакие гласные и согласные буквы не стояли рядом?
16. Сколькими способами 5 девочек и 5 мальчиков могут разместиться на поставленных в ряд 10 стульях, чтобы при этом никакие два мальчика и никакие две девочки не сидели рядом?
17. Имеется набор из 12 фломастеров. Сколькими способами можно выбрать 4 фломастера?

18. На плоскости даны n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Сколько прямых можно провести на плоскости, соединяя эти точки попарно?
19. На окружности отмечено 6 точек. Сколько существует многоугольников с вершинами в данных точках?
20. На олимпиаду по математике в одном классе претендуют 8 человек, в другом – 10 человек. Необходимо из каждого класса выбрать по 3 человека для участия в олимпиаде. Сколькими способами можно составить команду?
21. В команде студенческого общежития живут трое студентов. У них есть 4 чашки, 5 блюдец, 6 чайных ложек (все чашки, блюдца и ложки отличаются друг от друга). Сколькими способами они могут накрыть стол для чаепития (каждый получает одну чашку, одно блюдце и одну ложку)?
22. В почтовом отделении продаются открытки 10 сортов. Сколькими способами можно купить в нем 12 открыток?

Библиографический список

1. *Бродский, Я. С.* Статистика. Вероятность. Комбинаторика / Я. С. Бродский. — М. : Оникс ; Мир и образование, 2008. — 544 с.

2. *Вечтомов, Е. М.* Математика. Вводный курс / Е. М. Вечтомов, Д. В. Широков. — Киров : Радуга-ПРЕСС, 2014. — 240 с.

3. *Вечтомов, Е. М.* Основные математические структуры : учеб. пособие / Е. М. Вечтомов. — Киров : Радуга-ПРЕСС, 2013. — 292 с.

4. *Виленкин, Н. Я.* Комбинаторика / Н. Я. Виленкин, А. Н. Виленкин, П. А. Виленкин. — М. : МЦНМО, 2006. — 400 с.

5. *Далингер, В. А.* Методика обучения учащихся доказательству математических предложений. — М. : Просвещение, 2006. — 256 с.

6. *Дорофеева, А. В.* Высшая математика : учебник для академического бакалавриата. — М. : Издательство Юрайт, 2017. — 406 с.

7. *Мальцев, И. А.* Дискретная математика. — СПб. : Лань, 2011. — 304 с.

8. *Столл, Р.* Множества. Логика. Аксиоматические теории. — М. : Просвещение, 1968. — 232 с.

9. *Судоплатов, С. В.* Дискретная математика : учебник и практикум для академического бакалавриата. — М. : Издательство Юрайт, 2017. — 279 с.

10. *Тимофеева, И. Л.* Вводный курс математики : учеб. пособие / И. Л. Тимофеева, И. Е Сергеева, Е. В. Лукьянова. — М. : Академия, 2011. — 240 с.

11. *Успенский, В. А.* Простейшие примеры математических доказательств. — М. : МЦНМО, 2012. — 56 с.

Предметный указатель

Новые издания по дисциплине «Математика» и смежным дисциплинам

1. *Баврин, И. И.* Высшая математика для педагогических направлений. Основы математической обработки информации : учебник для бакалавров / И. И. Баврин. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

2. *Баврин, И. И.* Высшая математика для химиков, биологов и медиков : учебник и практикум для прикладного бакалавриата / И. И. Баврин. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

3. *Богомолов, Н. В.* Математика : учебник для прикладного бакалавриата / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

4. *Богомолов, Н. В.* Математика. Задачи с решениями. В 2 ч. : учеб. пособие для прикладного бакалавриата / Н. В. Богомолов. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

5. *Богомолов, Н. В.* Практические занятия по математике : учеб. пособие для прикладного бакалавриата / Н. В. Богомолов. — 11-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

6. *Богомолов, Н. В.* Практические занятия по математике. В 2 ч. : учеб. пособие для прикладного бакалавриата / Н. В. Богомолов. — 11-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

7. *Бугров, Я. С.* Высшая математика. В 3 т. : учебник для академического бакалавриата / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. — 7-е изд., стер. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

8. *Бугров, Я. С.* Высшая математика. Задачник : учеб. пособие для академического бакалавриата / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

9. *Васюков, В. Л.* Категорная логика : учеб. пособие для академического бакалавриата / В. Л. Васюков. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

10. *Васюков, В. Л.* Формальная феноменология : учеб. пособие для вузов / В. Л. Васюков. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

11. *Виноградов, И. М.* Основы теории чисел / И. М. Виноградов. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

12. Высшая математика : учебник и практикум для академического бакалавриата / М. Б. Хрипунова [и др.] ; под общ. ред. М. Б. Хрипуновой, И. И. Цыганок. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

13. *Гисин, В. Б.* Математика. Практикум : учеб. пособие для бакалавриата и магистратуры / В. Б. Гисин, Н. Ш. Кремер. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

14. *Глотова, М. Ю.* Математическая обработка информации : учебник и практикум для академического бакалавриата / М. Ю. Глотова, Е. А. Самохвалова. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

15. *Далингер, В. А.* Геометрия: планиметрические задачи на построение : учеб. пособие для академического бакалавриата / В. А. Далингер. — 2-е изд., испр. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

16. *Далингер, В. А.* Информатика и математика. Решение уравнений и оптимизация в Mathcad и maple : учебник и практикум для прикладного бакалавриата / В. А. Далингер, С. Д. Симонженков. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

17. *Далингер, В. А.* Методика обучения математике в начальной школе : учеб. пособие для академического бакалавриата / В. А. Далингер, Л. П. Борисова. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

18. *Далингер, В. А.* Методика обучения математике. Изучение дробей и действий над ними : учеб. пособие для прикладного бакалавриата / В. А. Далингер. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

19. *Далингер, В. А.* Методика обучения началам математического анализа : учебник и практикум для академического бакалавриата / В. А. Далингер. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

20. *Далингер, В. А.* Теория функций действительного переменного : учебник и практикум для академического бакалавриата / В. А. Далингер, С. Д. Симонженков. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

21. *Дорофеева, А. В.* Высшая математика. Сборник задач : учеб.-практ. пособие для академического бакалавриата / А. В. Дорофеева. — 2-е изд. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

22. Информатика и математика : учебник и практикум для академического бакалавриата / Т. М. Беляева [и др.] ; под ред. В. Д. Элькина. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

23. *Кашапова, Ф. Р.* Высшая математика. Общая алгебра в задачах : учебное пособие для академического бакалавриата / Ф. Р. Кашапова, И. А. Кашапов, Т. Н. Фоменко. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

24. *Крупский, В. Н.* Теория алгоритмов. Введение в сложность вычислений : учеб. пособие для бакалавриата и магистратуры / В. Н. Крупский. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

25. *Кучер, Т. П.* Математика. Тесты : учеб. пособие для прикладного бакалавриата / Т. П. Кучер. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

26. *Ларин, С. В.* Числовые системы : учеб. пособие для академического бакалавриата / С. В. Ларин. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

27. *Мойзес, О. Е.* Информатика. Углубленный курс : учеб. пособие для прикладного бакалавриата / О. Е. Мойзес, Е. А. Кузьменко. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

28. Основы математической обработки информации : учебник и практикум для академического бакалавриата / Н. Л. Стефанова, Н. В. Кочуренко, В. И. Снегурова, О. В. Харитонова ; под общ. ред. Н. Л. Стефановой. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

29. *Павлюченко, Ю. В.* Высшая математика для гуманитарных направлений : учебник и практикум для прикладного бакалавриата / Ю. В. Павлюченко, Н. Ш. Хассан ; под общ. ред. Ю. В. Павлюченко. — 4-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

30. *Пахомова, Е. Г.* Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Сборник заданий : учеб. пособие для прикладного бакалавриата / Е. Г. Пахомова, С. В. Рожкова. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

31. *Перельман, Я. И.* Веселые задачи / Я. И. Перельман. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

32. *Перельман, Я. И.* Живая математика. Математические рассказы и головоломки / Я. И. Перельман. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

33. *Перельман, Я. И.* Занимательная алгебра / Я. И. Перельман. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

34. *Перельман, Я. И.* Занимательная геометрия / Я. И. Перельман. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

35. *Поспелов, А. С.* Сборник задач по высшей математике. В 4 ч. : учеб. пособие для прикладного бакалавриата / А. С. Поспелов ; под ред. А. С. Поспелова. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

36. *Поспелов, А. С.* Сборник задач по высшей математике. Ч. 2 : учеб. пособие для бакалавров / А. С. Поспелов ; отв. ред. А. С. Поспелов. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

37. *Рейзлин, В. И.* Математическое моделирование : учеб. пособие для магистратуры / В. И. Рейзлин. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

38. *Скорубский, В. И.* Математическая логика : учебник и практикум для академического бакалавриата / В. И. Скорубский, В. И. Поляков, А. Г. Зыков. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

39. *Стеклов, В. А.* Математика и ее значение для человечества / В. А. Стеклов. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

40. *Татарников, О. В.* Линейная алгебра и линейное программирование. Практикум : учеб. пособие для академического бакалавриата / Л. Г. Бирюкова, Р. В. Сагитов ; под общ. ред. О. В. Татарникова. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

41. *Чаплыгин, С. А.* Механика жидкости и газа. Математика. Общая механика. Избранные труды / С. А. Чаплыгин. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

42. *Чебышёв, П. Л.* Математический анализ. В 2 ч. Часть 1 / П. Л. Чебышёв. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

43. *Шипачев, В. С.* Высшая математика : учебник и практикум / В. С. Шипачев. — 8-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

44. *Шипачев, В. С.* Высшая математика. Полный курс. В 2 т. : учебник для академического бакалавриата / В. С. Шипачев ; под ред. А. Н. Тихонова. — 4-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

45. *Шипачев, В. С.* Дифференциальное и интегральное исчисление : учебник и практикум для прикладного бакалавриата / В. С. Шипачев. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

Наши книги можно приобрести:

Учебным заведениям и библиотекам:
в отделе по работе с вузами
тел.: (495) 744-00-12, e-mail: vuz@urait.ru

Частным лицам:
список магазинов смотрите на сайте urait.ru
в разделе «Частным лицам»

Магазинам и корпоративным клиентам:
в отделе продаж
тел.: (495) 744-00-12, e-mail: sales@urait.ru

Отзывы об издании присылайте в редакцию
e-mail: red@urait.ru

Новые издания и дополнительные материалы доступны
в электронной библиотечной системе «Юрайт»
biblio-online.ru

Учебное издание

Вечтомов Евгений Михайлович,
Широков Дмитрий Владимирович

МАТЕМАТИКА: ЛОГИКА, ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ И КОМБИНАТОРИКА

Учебное пособие для СПО

Формат $70\times100\,{}^{1}/_{16}$.
Гарнитура «Charter». Печать цифровая.
Усл. печ. л. 18,85.

ООО «Издательство Юрайт»
111123, г. Москва, ул. Плеханова, д. 4а.
Тел.: (495) 744-00-12. E-mail: izdat@urait.ru, www.urait.ru